Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία

Σοφία Ζαφειρίδου

Καθηγήτρια

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Πατρών

ΠΑΤΡΑ 2023

Περιεχόμενα

Μέρος I

Γραμμική Άλγεβρα

Κεφάλαιο 1

Πίνακες

1.1 Η έννοια του πίνακα

Ορισμός 1.1.1. Μια απεικόνιση

$$A : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R}$$

καλείται *πίνακας* τύπου (ή διαστάσεων) $m \times n$ πάνω από το $\mathbb{R}$.
Η τιμή $A(i, j)$ της A στο (i, j) καλείται στοιχείο i-γραμμής και j-στήλης και συμβολίζεται με a_{ij} ή με $a_{i,j}$.

Ένας πίνακας τύπου $m \times n$ έχει m γραμμές και n στήλες και παριστάνεται ως εξής

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Ο πίνακας A με m γραμμές, n στήλες και στοιχεία a_{ij} για συντομία γράφεται:

$$A = (a_{ij}),\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n.$$

Συμβολίζουμε με $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ το σύνολο όλων των πινάκων τύπου $m \times n$ πάνω από το $\mathbb{R}$.

Τα στοιχεία του συνόλου $M_{1\times n}(\mathbb{R})$ είναι της μορφής $(a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n})$ και καλούνται γραμμές.

Τα στοιχεία του συνόλου $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ είναι της μορφής $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ και καλούνται στήλες.

Συμβολίζουμε με A_i την i-γραμμή και με A^j την j-στήλη του πίνακα A. Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, τότε

$$A_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}), \quad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ καλείται *μηδενικός πίνακας* τύπου $m \times n$.

Δηλαδή, μηδενικός πίνακας τύπου $m \times n$ είναι ο $O = (o_{ij})$ με $o_{ij} = 0$ για $i = 1, ..., m$ και για $j = 1, ..., n$.
Μηδενικοί πίνακες είναι οι παρακάτω:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

1.1.1 Τετραγωνικοί πίνακες.

Ένας πίνακας καλείται *τετραγωνικός* όταν το πλήθος των γραμμών του ισούται με το πλήθος των στηλών του, έχει δηλαδή την εξής μορφή:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ ενός τετραγωνικού πίνακα καλούνται διαγώνια.

Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ το συνόλο $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ αποτελείται από τετραγωνικούς πίνακες. Ο πίνακας

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$ καλείται *μοναδιαίος πίνακας* τύπου $n \times n$.

Δηλαδή, μοναδιαίος πίνακας τύπου $n \times n$ είναι ο $I = (a_{ij})$ με $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ για $i, j = 1, ..., n$.

Ο μοναδιαίος πίνακας τύπου $n \times n$ συμβολίζεται και με I_n για να διακρίνουμε τους μοναδιαίους πίνακες διαφορετικών τύπων.

Μοναδιαίοι πίνακες είναι οι παρακάτω:

$$I_1 = (1) \in M_{1\times 1}(\mathbb{R}), I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

1.1.2 Τριγωνικοί πίνακες.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_{n\times 4}(\mathbb{R})$ καλείται:

- *Άνω τριγωνικός*, όταν $a_{ij} = 0$ για $j < i$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – \textit{άνω τριγωνικός πίνακας}}$$

- *Κάτω τριγωνικός*, όταν $a_{ij} = 0$ για $j > i$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – \textit{κάτω τριγωνικός πίνακας}}$$

- *Διαγώνιος*, όταν $a_{ij} = 0$ για $j \neq i$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – \textit{διαγώνιος πίνακας}}$$

- *Τριγωνικός*, όταν είναι άνω τριγωνικος ή κάτω τριγωνικος.

1.2 Πράξεις με πίνακες.

1.2.1 Πολλαπλασιασμός πίνακα με πραγματικό αριθμό.

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, τότε ο πίνακας $\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

καλείται γινόμενο του λ επί το A.

Για κάθε πίνακα A συμβολίζουμε $\lambda A = \lambda \cdot A$ και $-A = (-1) \cdot A$.

1.2.2 Πρόσθεση πινάκων.

Αν $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$, τότε ο πίνακας

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

καλείται *άθροισμα πινάκων* A και B.

Παραδείγματα 1.2.1.

1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Τότε

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+5 & 3+5 \\ 4+3 & 5-4 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$4A = 4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 16 & 20 & 24 \end{pmatrix}.$$

2. Έστω $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 4 \end{pmatrix}$ και $Y = \begin{pmatrix} -2 & d \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Τότε

$$X + Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & d \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & b+d \\ c+3 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } kX = k\begin{pmatrix} a & b \\ c & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak & bk \\ ck & 4k \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Πολλαπλασιασμός γραμμής επί στήλη.

Το γινόμενο της γραμμής $A = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n) \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ επί την στήλη $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ είναι αριθμός (δηλαδή (1×1)-πίνακας) που ορίζεται ως εξής: $A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

Το γινόμενο της i-γραμμής $A_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ ...\ a_{in})$ ένος πίνακα A με n στήλες επί την j-στήλη $B^j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ ενός πίνακα B με n γραμμές βρίσκεται από τον τύπο

$$A_i \cdot B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

1.2.4 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Αν $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix} \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$,

τότε ο πίνακας

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \ldots & A_1 \cdot B^k \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \ldots & A_2 \cdot B^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 & \ldots & A_m \cdot B^k \end{pmatrix} \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$$

καλείται *γινόμενο πινάκων* A και B. Αναλυτικότερα, $A \cdot B$ είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1n}b_{n2} & \ldots & a_{11}b_{1k} + a_{12}b_{2k} + \ldots + a_{1n}b_{nk} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2n}b_{n2} & \ldots & a_{21}b_{1k} + a_{22}b_{2k} + \ldots + a_{2n}b_{nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \ldots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \ldots + a_{mn}b_{n2} & \ldots & a_{m1}b_{1k} + a_{m2}b_{2k} + \ldots + a_{mn}b_{nk} \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα 1.2.2.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 8 = 48.$

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (a\ b\ c) = \begin{pmatrix} xa & xb & xc \\ ya & yb & yc \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 5y \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 2b + 2c & 2x + 2y + 2z \\ 3a + 3b + 3c & 3x + 3y + 3z \end{pmatrix}$

1.3 Βασικές ιδιότητες των πράξεων με πίνακες.

Θεώρημα 1.3.1. *Αν $\mathcal{O}$ είναι ο μηδενικός πίνακας τύπου $m \times n$, $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε*

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + \mathcal{O} = A$
4. $A + (-A) = \mathcal{O}$
5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
7. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
8. $1 \cdot A = A$.

Θεώρημα 1.3.2. *Ο πολλαπλασιασμός των πινάκων έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Αν $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ και $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι μοναδιαίος πίνακας, τότε*
$$A \cdot I = I \cdot A = A$$
2. *Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ και $C \in M_{k\times p}(\mathbb{R})$, τότε*
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
3. *Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $B, C \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, τότε $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.*
Αν $A \in M_{k\times m}(\mathbb{R})$ και $B, C \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, τότε $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.
4. *Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε*
$$\lambda(A \cdot B) = A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B$$

1.4 Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί των γραμμών του πίνακα.

Ορισμός 1.4.1. Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ καλούνται οι εξής:

I. Αντιμετάθεση δύο γραμμών:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_i \longleftrightarrow A_j} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

II. Πολλαπλασιασμός μιάς γραμμής με $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda A_j} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

III. Η πρόσθεση σε μια γραμμη του πίνακα μιάς άλλης γραμμής πολλαπλασιασμένης με $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_i+\lambda A_j} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Ορισμός 1.4.2. Δύο πίνακες καλούνται *γραμμοϊσοδύναμοι*, όταν ο ένας προκύπτει από τον άλλον μετά την εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Σημείωση 1.4.3. Όμοια ορίζονται οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών ενός πίνακα και οι *στηλοϊσοδύναμοι* πίνακες.

1.5 Κλιμακωτοί πίνακες.

Μια γραμμή A_i ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ καλείται μηδενική αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $j = 1, ..., n$.

Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο μιας μη μηδενικής γραμμής ενός πίνακα καλείται *ηγετικό στοιχείο της γραμμής* αυτής. Δηλαδή, το στοιχείο $a_{ij} \neq 0$ της i-οστής γραμμής είναι ηγετικό, όταν ή $j = 1$ ή $j \neq 1$ και $a_{i1} = \cdots = a_{ij-1} = 0$.

Ορισμός 1.5.1. Ένας πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ καλείται **κλιμακωτός**, όταν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Οι μη μηδενικές γραμμές του πίνακα προηγούνται των μηδενικών γραμμών

2. Αν ο A έχει k μη μηδενικές γραμμές και $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{kj_k}$ είναι τα ηγετικά στοιχεία, αντίστοιχα, της 1ης, 2ης, ..., k-στης γραμμής, τότε $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.

Ορισμός 1.5.2. Ένας κλιμακωτός πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ καλείται *ανηγμένος*, όταν το ηγετικό στοιχείο σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι 1 και είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία βρίσκεται.

Θεώρημα 1.5.3. *Κάθε μη μηδενικός πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν* **κλιμακωτό** *πίνακα.*

Θεώρημα 1.5.4. *Κάθε μη μηδενικός πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν ανηγμένο πίνακα.*

Παράδειγμα 1.5.5. Θα βρούμε κλιμακωτό πίνακα B γραμμοϊσοδύναμο με τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ εφαρμόζοντας διαδοχικά στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \longleftrightarrow A_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2-2A_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -11 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_3+\frac{3}{11}A_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{11} \end{pmatrix} = B.$$

Θα βρούμε ανηγμένο πίνακα C γραμμοϊσοδύναμο με τον πίνακα A εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στο B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{11} \end{pmatrix} \underset{-\frac{11}{4}A_3}{\xrightarrow{-\frac{1}{11}A_2}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2-\frac{5}{11}A_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1-7A_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

1.6 Γραμμική εξάρτηση γραμμών ή στηλών ενός πίνακα.

Θα λέμε ότι η γραμμή A_i ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ είναι *γραμμικώς συνδυασμός των γραμμών* A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_r} του A, όταν

$$A_i = \lambda_1 A_{i_1} + \lambda_2 A_{i_2} + \cdots + \lambda_r A_{i_r}, \text{ όπου } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}.$$

Οι γραμμές $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$, $r \geq 2$, ενός πίνακα A καλουνται *γραμμικώς ανεξάρτητες*, όταν καμμία από αυτές δεν εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων.

Οι γραμμές $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$, $r \geq 2$, ενός πίνακα A καλουνται *γραμμικώς εξαρτημένες*, όταν κάποια από αυτές εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων.

Μία γραμμή A_i καλείται γραμμικώς ανεξάρτητη όταν είναι μη μηδενική.

Μία γραμμή A_i καλείται γραμμικώς εξαρτημένη όταν είναι μηδενική.

Όμοια ορίζεται η γραμμική εξάρτηση (ανεξαρτησία) των στηλών ενός πίνακα.

Πρόταση 1.6.1. *Οι μη μηδενικές γραμμές (αντίστοιχα, στήλες) κάθε κλιμακωτού πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.*

Παραδείγματα 1.6.2.

1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

   Οι γραμμές $A_1 = (1\ 2\ 3)$ και $A_2 = (1\ 4\ 2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, αφού $A_2 \neq \lambda A_1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Οι γραμμές A_1, A_2, A_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένες, αφού $A_3 = 2A_1 + A_2$.

2. Οι στήλες του $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες, αφού $A^1 = 0 \cdot A^2 + 0 \cdot A^3 + 0 \cdot A^4$.

3. Οι γραμμές των κλιμακωτών πινάκων $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Ο πίνακας B είναι ανηγμένος, ενώ ο A είναι μη είναι ανηγμένος.

1.7 Βαθμός του πίνακα.

Ορισμός 1.7.1. Το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ καλείται *βαθμός* του A και συμβολίζεται με $rank(A)$.

Θεώρημα 1.7.2. *Αν οι πίνακες A και B είναι γραμμοϊσοδύναμοι, τότε $rank(A) = rank(B)$.*

Επειδή οι μη μηδενικές γραμμές οποιουδήποτε κλιμακωτού πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, από τα Θεωρήματα 1.5.3 και 1.7.2 προκύπτει ότι:

Πόρισμα 1.7.3. *Ο βαθμός ενός κλιμακωτού πίνακα ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του.*

Πόρισμα 1.7.4. *Ο βαθμός ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ισούται με τον βαθμό του κλιμακωτού πίνακα γραμμοϊσοδύναμου με τον A.*

Παράδειγμα 1.7.5. Θα βρούμε τον βαθμό του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ φέρνοντάς τον σε κλιμακωτή μορφή.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1+A_3} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}A_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1-A_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \longleftrightarrow A_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2-A_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα, $rank(A) = rank \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

1.8 Ανάστροφος ενός πίνακα.

Ο ανάστροφος ενός πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ λέγεται ο πίνακας $A^t = (a'_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ με $a'_{ij} = a_{ji}$. Δηλαδή η i-γραμμή του A είναι η i-στήλη του A^t:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

Παραδείγματα 1.8.1.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

Θεώρημα 1.8.2. *Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, τότε*

1. $(A^t)^t = A$

2. $(A + B)^t = A^t + B^t$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

3. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$.

4. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

1.9 Αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα.

Ορισμός 1.9.1. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n\times n}(R)$ καλείται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει πίνακας $B \in M_{n\times n}(R)$ τέτοιος ώστε

$$A \cdot B = B \cdot A = I, \tag{1.3}$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος τετραγωνικός πίνακας τύπου $n \times n$.

Θεώρημα 1.9.2. *Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα A υπάρχει μοναδικός πίνακας B για τον οποίον ισχύουν οι ισότητες (1.3).*

Ορισμός 1.9.3. Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα A ο μοναδικός πίνακας B για τον οποίο ισχύουν οι ισότητες (1.3), καλείται αντίστροφος πίνακας του A και συμβολίζεται με A^{-1}, οπότε

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Παραδείγματα 1.9.4.

1. Ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με $ad - bc \neq 0$ είναι ο πίνακας $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, διότι $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$.

2. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$, εφόσον $abc \neq 0$.

1.9.1 Κριτήρια αντιστρεψιμότητας ενός πίνακα.

Θεώρημα 1.9.5. *Για έναν τετραγωνικό πίνακα $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο A είναι αντιστρέψιμος.

(ii) Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

(iii) Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

(iv) Ο A είναι ισοδύναμος με τον μοναδιαίο πίνακα $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Πόρισμα 1.9.6. *Ένας τετραγωνικός πίνακας που περιέχει μηδενική γραμμή ή μηδενική στήλη δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Παραδείγματα 1.9.7.

1. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος, διότι $A_3 = 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2$.

2. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 7 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος, διότι $A_2 = 4 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2$.

3. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, διότι οι γραμμές του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

1.9.2 Ιδιότητες του αντίστροφου πίνακα.

Για έναν αντιστρέψιμο τετραγωνικό πίνακα A ορίζουμε

$$A^{-m} = (A^{-1})^m.$$

1. Αν οι πίνακες $A, B \in M_{n\times n}(R)$ είναι αντστρέψιμοι, τότε ο πίνακας $A \cdot B$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

2. Αν ο πίνακας $A \in M_{n\times n}(R)$ είναι αντστρέψιμος, τότε οι πίνακεσ A^t και A^{-1} είναι αντιστρέψιμοι και

   (α΄) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

   (β΄) $(A^{-1})^{-1} = A$.

   (γ΄) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ για $k \neq 0$.

   (δ΄) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ για κάθε $m = 1, 2, 3, \ldots$.

1.10 Στοιχειώδεις πίνακες.

Ορισμός 1.10.1. Ένας τετραγωνικός πίνακας τύπου $n \times n$ καλείται στοιχειώδης όταν μπορεί να προκύψει από τον μοναδιαίο πίνακα τύπου $n \times n$ εφαρμόζοντας έναν στοιχειώδη μετασχηματισμο γραμμών.

Υπάρχουν τρείς μορφές στοιχειωδών πινάκων, κάθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί σε έναν στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών:

I. Αντιμετάθεση δύο γραμμών του I:

$$I=\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ i-\text{γραμμή}\\ \\ j-\text{γραμμή}\\ \\ \\ \end{array}\xrightarrow{A_i\leftrightarrow A_j}\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)=I_{[i]\leftrightarrow[j]}$$

II. Πολλαπλασιασμός κάποιας γραμμής του I με $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$I=\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&1&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ i-\text{γραμμή}\\ \\ \\ \\ \end{array}\xrightarrow{\lambda A_i}\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\lambda&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)=I_{\lambda[i]}$$

III. Η πρόσθεση σε μια γραμμη του I μιας άλλης γραμμής του I πολλαπλασιασμένης με $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$I=\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ i-\text{γραμμή}\\ \\ j-\text{γραμμή}\\ \\ \\ \end{array}\xrightarrow{A_i+\lambda A_j}\left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&\lambda&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)=I_{[i]+\lambda[j]}$$

1.10.1 Ιδιότητες των στοιχειωδών πινάκων.

1. Κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος.
2. Ο αντίστροφος πίνακας ενός στοιχειώδους πίνακα είναι στοιχειώδης πίνακας.

Θεώρημα 1.10.2. *Ο πίνακας $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ προκύπτει από τον πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ με την εφαρμογή του στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών ϕ αν και μόνον αν*

$$B = I_\varphi \cdot A,$$

όπου I_ϕ είναι ο στοιχειώδης πίνακας που προκύπτει από το μοναδιαίο πίνακα $I \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ με την εφαρμογή του ϕ.

Παράδειγμα 1.10.3. Αν ϕ συμβολίζει τον στοιχειώδη μετασηματισμό γραμμών $A_1 + 2A_2$ (την πρόσθεση της δεύτερης γραμμής πολλαπλασιασμένης επί 2 στην πρώτη γραμμή), τότε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \overset{\phi = A_1 + 2A_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = B$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\phi}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_\phi$$

$$I_\phi \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = B$$

Θεώρημα 1.10.4. *Ο πίνακας $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ προκύπτει από τον πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ με την διαδοχική εφαρμογή των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k$ αν και μόνον αν*

$$B = I_{\varphi_k} \cdot \ldots \cdot I_{\varphi_2} \cdot I_{\varphi_1} \cdot A,$$

όπου I_{ϕ_i} είναι ο στοιχειώδης πίνακας που προκύπτει από το μοναδιαίο πίνακα $I \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ με την εφαρμογή του ϕ_i.

Θεώρημα 1.10.5. *Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο A είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων.*

Παράδειγμα 1.10.6. Για να παρασταθεί ο αντιστρέψιμος πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, θα εφαρμόσουμε στον A στοιχειώδεις μετασχηματισμους γραμμών μέχρι να πάρουμε τον μοναδιαίο πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\varphi_1}{\overset{A_2 - 3A_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\varphi_2}{\overset{-\frac{1}{2}A_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\varphi_3}{\overset{A_1 - 2A_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Από το Θεώρημα 1.10.4: $I_2 = I_{\varphi_3} \cdot I_{\varphi_2} \cdot I_{\varphi_1} \cdot A$.
Επομένως

$$A = I_{\varphi_1^{-1}} \cdot I_{\varphi_2^{-1}} \cdot I_{\varphi_3^{-1}} \cdot I_2$$

Υπολογίζουμε

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\varphi_1^{-1}}{\overset{A_2 + 3A_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I_{\varphi_1^{-1}}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\varphi_2^{-1}}{\overset{-2A_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = I_{\varphi_2^{-1}}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\varphi_3^{-1}}{\overset{A_1 + 2A_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{\varphi_3^{-1}}$$

Άρα,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.11 Υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα.

Από τα Θεωρήμα 1.9.5 (iv) συνεπάγεται ότι αν ένας πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A είναι ισοδύναμος με τον μοναδιαίο πίνακα I_n. Επομένως ο I_n προκύπτει από το A μετά την διαδοχική εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ στον A. Από το Θεώρημα 1.10.4 συνεπάγεται ότι

$$I_n = I_{\varphi_k} \cdot \ldots \cdot I_{\varphi_2} \cdot I_{\varphi_1} \cdot A,$$

όπου I_{ϕ_i} είναι ο στοιχειώδης πίνακας που προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ με την εφαρμογή του στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών ϕ_i.

Πολλαπλασιάζοντας με A^{-1} από δεξιά και τα δύο μέλη της προηγούμενης ισότητας παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_n \cdot A^{-1} &= I_{\varphi_k} \cdot \ldots \cdot I_{\varphi_2} \cdot I_{\varphi_1} \cdot A \cdot A^{-1} \Longleftrightarrow \\ A^{-1} &= I_{\varphi_k} \cdot \ldots \cdot I_{\varphi_2} \cdot I_{\varphi_1} \cdot I_n \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι αν ο I_n προκύπτει μετά την εφαρμογή των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k$ στον A, τότε ο A^{-1} προκύπτει μετά την εφαρμογή των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k$ στον I_n

Άρα, για να βρούμε τον αντίστροφο ενός πίνακα A μπορούμε να εφαρμόσουμε τον εξής κανόνα:

- *Αν φέρουμε τον πίνακα $(A|I_n)$ με τη βοήθεια των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών στη μορφή $(I_n|B)$, τότε $B = A^{-1}$.*

Παραδείγματα 1.11.1.

1. Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας του $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

   Εφαρμόζουμε διαδοχικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον πίνακα $(A|\ I_2)$ έτσι ώστε ο A του $(A|\ I_2)$ να μετασχηματιστεί στον πίνακα I_2, τότε ο I_2 του $(A|\ I_2)$ θα μετασχηματιστεί στον A^{-1}.

$$(A|\ I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_2 - 2A_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_1 + 3A_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-A_2]{\frac{1}{2}A_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) = (I_2|A^{-1}) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας του $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Εφαρμόζουμε διαδοχικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον πίνακα $(A|\ I_3)$ έτσι ώστε ο A του $(A|\ I_3)$ να μετασχηματιστεί στον πίνακα I_3, τότε ο I_3 του $(A|\ I_3)$ θα μετασχηματιστεί στον A^{-1}.

$$(A|\ I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A_3 + A_2]{A_1 - A_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_1 - 3A_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_2 - A_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{A_3 + A_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-A_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) = (I_3|\ A^{-1})$$

   Συνεπώς, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1.12 Ασκήσεις

1.12.1. Να βρεθούν οι πίνακες $A+B$ και $A-B$, όταν

(i) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 10 & -4 & -3 \\ 8 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

(ii) $A=\begin{pmatrix} a_1 & \frac{a_2+b_1}{2} & \frac{a_3+c_1}{2} \\ \frac{a_2+b_1}{2} & b_2 & \frac{b_3+c_2}{2} \\ \frac{a_3+c_1}{2} & \frac{b_3+c_2}{2} & c_3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_2-b_1}{2} & \frac{a_3-c_1}{2} \\ -\frac{a_2-b_1}{2} & 0 & \frac{b_3-c_2}{2} \\ -\frac{a_3-c_1}{2} & \frac{b_3-c_2}{2} & 0 \end{pmatrix}$

1.12.2. Να λυθεί η εξίσωση ως προς τον πίνακα X:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.12.3. Να βρεθεί οι πίνακας $AB+2A$ για $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.12.4. Να βρεθούν οι ανάστροφοι των πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -2 & -8 & 4 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

1.12.5. Ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται *συμμετρικός*, όταν $A=A^t$.

(i) Να δοθεί παράδειγμα ενός 3×3 συμμετρικού πίνακα.

(ii) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5x \\ -1 & 7 & 0 \\ -x^2+6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός.

1.12.6. Ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται *αντισυμμετρικός* όταν $A^t=-A$.

(i) Να δοθεί παράδειγμα ενός 3×3 αντισυμμετρικού πίνακα.

(ii) Να αποδειχθεί ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

1.12.7. Έστω ότι $A\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ $B\in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$, $C\in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$, $X\in M_{1\times 3}(\mathbb{R})$, $Y\in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$.

(i) Να βρεθούν οι διαστάσεις των πινάκων:

$$A\cdot B,\ \ B\cdot C,\ \ C\cdot A,\ \ B\cdot Y,\ \ Y\cdot X,\ \ X\cdot A.$$

(ii) Πόσες γραμμές έχει ο πίνακας T σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
$a)$ $T=A\cdot B$, $b)$ $T=C\cdot A$, $c)$ $T=X\cdot A$.

(iii) Πόσες στήλες έχει ο πίνακας M σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
$a)$ $T=A\cdot B$, $b)$ $T=C\cdot A$, $c)$ $T=X\cdot A$.

1.12.8. Να βρεθούν τα γινόμενα των πινάκων:

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.12.9. Να βρεθεί ο πίνακας $A + A^2 + I_3$ για $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1.12.10. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Ποιά από τα γινόμενα A^2, AC, DA, AD, D^2, DC, CD, C^2 είναι επιτρεπτά;

(ii) Να διερευνηθεί αν οι πίνακες AB και BA είναι ίσοι.

1.12.11. Δίνονται οι πίνακες:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}, \; X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(i) Να βρεθούν οι πίνακες AX' και $AX' + B$.

(ii) Να γραφεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων στη μορφή μιας ισότητας μεταξύ πινάκων X, A και X'

$$\begin{array}{l} x = 8x' + 4y' + 2z' \\ y = 2x' - 2y' + 3z' \\ z = 4x' - 6y' + 8z' \end{array}.$$

(iii) Να γραφεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων στη μορφή μιας ισότητας μεταξύ πινάκων X, A, X' και B.

$$\begin{array}{l} x = 8x' + 4y' + 2z' + 7 \\ y = 2x' - 2y' + 3z' + 9 \\ z = 4x' - 6y' + 8z' - 5 \end{array}.$$

1.12.12. Για $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ να βρεθούν τα γινόμενα των πινάκων: $(x\ y\ z)A$ και $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1.12.13. Για $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ να αποδειχθεί ότι $N^2 = I_2$.

Στη συνέχεια να βρεθούν οι πίνακες N^5 και ο N^8.

1.12.14. Για $M = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ να αποδειχθεί ότι $M^3 = M$.

Στη συνέχεια να βρεθούν οι πίνακες M^4 και M^7.

1.12.15. Να λυθούν οι εξισώσεις πινάκων ως προς τον πίνακα X αν είναι γνωστό ότι A είναι τετραγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας:

$$a)\ AX = B, \quad b)\ Y = AX + B \quad c)\ AX = PA$$

1.12.16. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Να αποδειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1}.

(ii) Να βρεθεί ο πίνακας B αν $A^2 - 2BA = I_3$, όπου I_3 είναι ο μοναδιαίος πίνακας τύπου 3×3.

1.12.17. Να αναχθούν σε κλιμακωτή μορφή οι πίνακες:

$$(i) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (iii) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

1.12.18. Να προσδιοριστούν οι βαθμοί των πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & -6 & 9 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.12.19. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ είναι αντίστροφος του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

1.12.20. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των πινάκων: $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.12.21. Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ να βρεθούν οι πίνακες $\left(A^t\right)^{-1}$ και $\left(A^{-1}\right)^t$.

1.12.22. Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ να βρεθεί ο πίνακας B για τον οποίο

$$AB = \begin{pmatrix} 24 & 12 & 16 \\ -3 & 3 & 24 \\ 16 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.12.23. Να σχολιαστεί γιατί οι παρακάτω πίνακες δεν είναι αντιστρέψιμοι:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 2a+3x & x \\ b & 2b+3y & y \\ c & 2c+3z & z \end{pmatrix}$$

1.12.24. Να παρασταθεί ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Κεφάλαιο 2

Ορίζουσα του πίνακα.

Στο Κεφάλαιο αυτό για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ θα ορίσουμε μια απεικόνιση $det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με επιθυμητές ιδιότητες.

Η απεικόνιση det σε κάθε τετραγωνικό πίνακα A αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $det(A)$, ο οποίος καλείται ορίζουσα του A.

2.1 Μεταθέσεις.

Έστω $\{p_1, p_2 ..., p_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο.

Κάθε ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση $\mu : \{p_1, p_2, ..., p_n\} \to \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ καλείται *μετάθεση*.

Η μετάθεση μ συμβολίζεται με πίνακα

$$\mu = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \mu(p_1) & \mu(p_2) & \dots & \mu(p_n) \end{pmatrix}$$

Η *αντίστροφη της μετάθεσης* μ είναι η μετάθεση

$$\mu^{-1} = \begin{pmatrix} \mu(p_1) & \mu(p_2) & \dots & \mu(p_n) \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Αν $\mu = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \mu(p_1) & \mu(p_2) & \dots & \mu(p_n) \end{pmatrix}$ και $\nu = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \nu(p_1) & \nu(p_2) & \dots & \nu(p_n) \end{pmatrix}$, τότε γινόμενο μ επί ν είναι η μετάθεση

$$\nu \circ \mu = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \nu(\mu(p_1)) & \nu(\mu(p_2)) & \dots & \nu(\mu(p_n)) \end{pmatrix}$$

Το πλήθος των μεταθέσεων ένος συνόλου με n στοιχεία ισούται με $n!$.

Θα περιοριστούμε στις μεταθέσεις των πεπερασμένων συνόλων φυσικών αριθμών της μορφής

$$S_n = \{1, 2, ..., n\}$$

Θα συμβολίζουμε με S'_n το σύνολο όλων των μεταθέσεων του S_n.

Η μετάθεση $1_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ του S_n καλείται *ταυτοτική μετάθεση* του S_n.

Μια μετάθεση $\alpha : S_n \to S_n$ καλείται *αντιμετάθεση* όταν υπάρχουν $i, j \in S_n$ τέτοια ώστε $\alpha(i) = j$, $\alpha(j) = i$ και $\alpha(k) = k$ για κάθε $k \in S_n \setminus \{i, j\}$.

Μια αντιμετάθεση των στοιχείων i, j μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

$$\alpha(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα 2.1.1.

1. Ορίζουμε τη μετάθεση $\mu : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ ως εξής:
   $\mu(1) = 2,\ \mu(2) = 4,\ \mu(3) = 1,\ \mu(4) = 3.$
   Τότε
   $$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mu(1) & \mu(2) & \mu(3) & \mu(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Αν $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ και $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, τότε
   $$\nu \circ \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mu \circ \nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Το πλήθος των μεταθέσεων του $S_3 = \{1,2,3\}$ είναι $3! = 6$, οι οποίες είναι οι εξής:
   $$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
   $$\mu_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mu_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \mu_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
   $$S_3' = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$$

4. Αν $\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, τότε $\omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Επίσης $\omega \cdot \omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1_3$

5. Οι αντιμεταθέσεις του S_3 είναι: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.1.1 Παραβάσεις μιας μετάθεσης.

Έστω $i, j \in S_n = \{1, \ldots, n\}$.
Το ζευγος (i, j) καλείται *παράβαση* μιας μετάθεσης $\mu : S_n \to S_n$, όταν $i < j$ και $\mu(i) > \mu(j)$.
Συμβολίζουμε με $\pi(\mu)$ το πλήθος των παραβάσεων της μετάθεσης μ.
Η μ καλείται *άρτια μετάθεση* (αντίστοιχα, *περιττή μετάθεση*) , όταν ο αριθμός $\pi(\mu)$ είναι άρτιος (αντίστοιχα, περιττός).

Παράδειγμα 2.1.2.

1. Το πλήθος των παραβάσεων της ταυτοτικής μετάθεσης $1_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ είναι μηδέν.

2. Αν $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, τότε το σύνολο των παραβάσεων της μ είναι $\{(1,3), (2,3)\}$.
   Επομένως, $\pi(\mu) = 2$. Η μετάθεση μ είναι άρτια.

3. Αν $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, τότε το σύνολο των παραβάσεων της ψ είναι $\{(1,3), (2,3), (2,4)\}$.
   Επομένως, $\pi(\psi) = 3$. Η μετάθεση ψ είναι περιττή.

2.2 Ορισμός της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα.

Ορισμός 2.2.1. Για κάθε τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

ο αριθμός

$$det(A) = \sum_{\mu \in S_n'} (-1)^{\pi(\mu)} a_{1\mu(1)} \cdot a_{2\mu(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\mu(n)}$$

καλείται *ορίζουσα* του A.

Η απεικόνιση $det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, η οποία σε κάθε πίνακα $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ αντιστοιχίζει την ορίζουσα του A, καλείται *ορίζουσιακή*.

Η ορίζουσα ενός πίνακα A συμβολίζεται και με $|A|$.

Παραδείγματα 2.2.2.

1. Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

   Για $S_2 = \{1, 2\}$, το σύνολο των μεταθέσεων είναι $S_2' = \{\mu_1, \mu_2\}$, όπου

   $$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Έχουμε $\pi(\mu_1) = 0$ και $\pi(\mu_2) = 1$. Επομένως

   $$det(A) = (-1)^{\pi(\mu_1)} a_{1\mu_1(1)} a_{2\mu_1(2)} + (-1)^{\pi(\mu_2)} a_{1\mu_2(1)} a_{2\mu_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

   Για $S_3 = \{1, 2, 3\}$, το σύνολο των μεταθέσεων είναι $S_3' = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$, όπου

   $$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

   $$\mu_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mu_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mu_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Έχουμε $\pi(\mu_1) = 0$ και $\pi(\mu_2) = 2$, $\pi(\mu_3) = 2$, $\pi(\mu_4) = 3$, $\pi(\mu_5) = 1$, $\pi(\mu_6) = 1$.
   Επομένως,

   $$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

2.3 Ελάσσονες πίνακες και αλγεβρικά συμπληρώματα.

Θεωρούμε έναν τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

Ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα A μετά την διαγραφή της i-γραμμής και της j-στήλης καλείται *ελάσσων πίνακας* του a_{ij} και συμβολίζεται με M_i^j.

Ο αριθμός $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_i^j)$ καλείται *αλγεβρικό συμπλήρωμα* του στοιχείου a_{ij}.

Παραδείγματα 2.3.1.

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow M_1^1 = a_{22},\ M_1^2 = a_{21},\ M_2^1 = a_{12},\ M_2^2 = a_{11} \Longrightarrow$
   $A_{11} = (-1)^{1+1} det(M_1^1) = a_{22},\ A_{12} = (-1)^{1+2} det(M_1^2) = -a_{21},$
   $A_{21} = (-1)^{2+1} det(M_2^1) = -a_{12},\ A_{22} = (-1)^{2+2} det(M_2^2) = a_{11}.$

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow M_2^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{22} = (-1)^{2+2} det(M_2^2) = (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}).$

2.4 Ανάπτυξη μιας ορίζουσας κατά γραμμή ή κατά στήλη.

Θεώρημα 2.4.1. *Η ορίζουσα ενός πίνακα $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ισούται με το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων οποιασδήποτε γραμμής επί τα αλγεβρικά τους συμπληρώματα, δηλαδή*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}, \forall i = 1, \ldots, n$$

Θεώρημα 2.4.2. *Η ορίζουσα ενός πίνακα $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ισούται με το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων οποιασδήποτε στήλης επί τα αλγεβρικά τους συμπληρώματα, δηλαδή*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \forall j = 1, \ldots, n$$

Με τη βοήθεια των πινάκων M_i^j που προκύπτουν με τη διαγραφή της i-γραμμής και j-στήλης ενός πίνακα A τύπου $n \times n$, παίρνουμε:

την ανάπτυξη της ορίζουσας του A κατά i-γραμμή

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_i^j|,$$

την ανάπτυξη της ορίζουσας του A κατά j-στήλη

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_i^j|$$

Παραδείγματα 2.4.3. Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$

1. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής παίρνουμε

$$det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A κατά τα στοιχεία της 2ης στήλης παίρνουμε

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$
$$= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

2.5 Ιδιότητες των οριζουσών.

1. Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα αλλάζει πρόσημο με την αντιμετάθεση δύο γραμμών:

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

2. Αν σε μια γραμμή ενός πίνακα προστεθεί μια άλλη γραμμή του ίδιου πίνακα πολλαπλασιασμένη με έναν αριθμό λ, τότε ο πίνακας που προκύπτει έχει την ίδια ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

3. Αν μια γραμμή ένος πίνακα A πολλαπλασιαστεί με $\lambda \neq 0$, τότε προκύπτει πίνακας με ορίζουσα $\lambda|A|$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \dots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. Αν $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, τότε $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

6. Έστω $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   (α΄) $det(A) \neq 0$ αν και μόνον αν οι γραμμές (αντίστοιχα, οι στήλες) του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

   (β΄) $det(A^t) = det(A)$

   (γ΄) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

7. Η ορίζουσα κάθε τριγωνικού πίνακα (διαγώνιου, άνω τριγωνικού, κάτω τριγωνικού) ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του.

Πόρισμα 2.5.1. *Η ορίζουσα ενός πίνακα που έχει δύο γραμμές ή δύο στήλες ίδιες ισούται με μηδέν.*

Παραδείγματα 2.5.2.

1. $\begin{vmatrix} 4a & 4b \\ c & d \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ από την ιδιότητα 3.

2. $\begin{vmatrix} a+3c & b+3d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ από την ιδιότητα 2.

Σημείωση 2.5.3. Ανάλογες ιδιότητες ισχύουν και για τις στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών:

1. Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα αλλάζει πρόσημο με την αντιμετάθεση δύο στηλών:

$$\begin{vmatrix} \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1j} & \ldots \\ \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2j} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nj} & \ldots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1i} & \ldots \\ \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2i} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{ni} & \ldots \end{vmatrix}$$

2. Αν σε μια στήλη ενός πίνακα προστεθεί μια άλλη στήλη του ίδιου πίνακα πολλαπλασιασμένη με έναν αριθμό λ, τότε ο πίνακας που προκύπτει έχει την ίδια ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1i} & \ldots \\ \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2i} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{ni} & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1j} + \lambda a_{1i} & \ldots \\ \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2j} + \lambda a_{2i} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nj} + \lambda a_{ni} & \ldots \end{vmatrix}$$

3. Αν μια στήλη ένος πίνακα A πολλαπλασιαστεί με $\lambda \neq 0$, τότε προκύπτει πίνακας με ορίζουσα $\lambda|A|$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \lambda a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & \lambda a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \lambda a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} + a'_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} + a'_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni} + a'_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a'_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a'_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a'_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

2.6 Ανεύρεση του αντίστροφου πίνακα.

Θεωρούμε έναν τετραγωνικό πίνακα: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Αντικαθιστώντας κάθε στοιχείο a_{ij} με το αλγεβρικό του συμπλήρωμα, παίρνουμε τον πίνακα :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

Ο *συμπληρωματικός* ή *προσαρτημένος* πίνακας του πίνακα A καλείται ο πίνακας:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Θεώρημα 2.6.1. *Αν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και $det(A) \neq 0$, τότε*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\, adj(A).$$

Παραδείγματα 2.6.2.

1. Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας τού
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$
Έχουμε $adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ και $det(A) = -2$.
Άρα,
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας τού $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Βρίσκουμε $det(A) = -1$ και
$$adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$
Άρα,
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\, adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

2.7 Προσδιορισμός του βαθμού ενός πίνακα.

Θεωρούμε έναν πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Κάθε πίνακας που προκύπτει από τον A με διαγραφή κάποιων γραμμών ή στηλών του A καλείται *ελλάσων πίνακας* ή *υποπίνακας* του πίνακα A.

Συμβολίζουμε με $M_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ τον υποπίνακα του A που προκύπτει μετά τη διαγραφή των:
i_1-γραμμής, ..., i_p-γραμμής και j_1-στήλης, ..., j_q-στήλης του A.

Θεώρημα 2.7.1. *Ο βαθμός $rank(A)$ ενός πίνακα A ισούται με το πλήθος των γραμμών του τετραγωνικού υποπίνακα T του A, που έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) $det(T) \neq 0$,

(ii) ο T έχει τις περισσότερες γραμμές από όλους τους τετραγωνικούς υποπίνακες του A που έχουν ορίζουσα $\neq 0$.

Παράδειγμα 2.7.2. Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Επειδή ο A είναι μη μηδενικός και έχει 4 γραμμές, $1 \leq rank(A) \leq 4$.

Παρατηρούμε ότι οι γραμμές του πίνακα είναι γραμμικώς εξαρτημένες, αφού $A_4 = 2A_1$. Άρα, $rank(A) \leq 3$.

Για τον υποπίνακα $M_4^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ που προκύπτει από τον A μετά τη διαγραφή της 4ης γραμμής και της 4ης στήλης έχουμε: $det(M_4^4) = -4 \neq 0$. Άρα, $rank(A) = 3$.

2.8 Ασκήσεις.

2.8.1. Να βρεθεί το πλήθος των παραβάσεων στις παρακάτω μεταθέσεις και να χαρακτηριστούν οι μεταθέσεις ως άρτιες ή περιττές:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.8.2. Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της 2ης γραμμής.

2.8.3. Να βρεθούν οι ορίζουσες:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.8.4. Να βρεθούν οι ορίζουσες των πινάκων:

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 12 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

2.8.5. Να αποδειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

2.8.6. Να αποδειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2b^2.$$

2.8.7. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2.8.8. Να αποδειχθεί ότι σε ένα τετραγωνικό πίνακα $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων μιας στήλης (γραμμής) επί τα αλγεβρικά συμπληρώματα των αντίστοιχων στοιχείων μιας άλλης στήλης (γραμμής) είναι μηδέν, δηλαδή αν $i \neq j$, τότε $a_{1i}A_{1j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0$.

Λύση. Έστω $A = (A^1 \ldots A^i \ldots A^j \ldots A^n)$. Αντικαθιστώντας την j-στήλη με μια στήλη $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ παίρνουμε τον πίνακα $B = (A^1 \ldots A^i \ldots b \ldots A^n)$.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του B κατά τη j-στήλη παίρνουμε $det(B) = b_1A_{1j} + \ldots + b_nA_{nj}$. Επειδή η ορίζουσα ενός πίνακα δεν αλλάζει όταν σε μία στήλη του προσθέτουμε μία άλλη, έχουμε

$$det(B) = (b_1 + a_{1i})A_{1j} + \ldots + (b_n + a_{ni})A_{nj}$$

Επομένως $det(B) = det(B) + a_{1i}A_{1j} + \ldots + a_{ni}A_{nj}$. Άρα, $a_{1i}A_{1j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0$.

2.8.9. Να σχολιαστεί γιατί οι ορίζουσες είναι ίσες με μηδέν:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & x & 0 & k \\ b & y & 0 & l \\ c & w & 0 & m \\ d & z & 0 & n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 & 3a_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

2.8.10. Να υπολογιστεί ο βαθμός των πινάκων με τη χρήση των υποπινάκων (Θεώρημα 2.7.1):

$$\begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ -5 & 3 & -2 \\ 9 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

2.8.11. Αν $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$, να υπολογιστούν οι ορίζουσες των πινάκων:

$$(i) \begin{pmatrix} 2a-c & 2b & 3c \\ 2d-f & 2e & 3f \\ 2g-i & 2h & 3i \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}, \quad (iii) \begin{pmatrix} 2a & 3a+g & -d \\ 2b & 3b+h & -e \\ 2c & 3c+i & -f \end{pmatrix}.$$

2.8.12. : Έστω A τετραγωνικός πίνακας τύπου $n \times n$. Να αποδειχθεί ότι:

(i) $det(A^t) = det(A)$.

(ii) Αν $A^t = -A$ και το πλήθος των γραμμών του A είναι $2n+1$, τότε ο A είναι μη αντιστρέψιμος.

(iii) Ο A είναι μη αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $det(A) = 0$.

(iv) $rank(A) = n$ αν και μόνον αν $det(A) \neq 0$.

(v) $det(kA) = k^n det(A)$.

2.8.13. Να προσδιοριστεί για ποιές τιμές του k ο βαθμός του πίνακα $A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -k \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ είναι μικρότερος του 3.

2.8.14. Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες ο βαθμός του πίνακα $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι < 3.

2.8.15. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο παρακάτω πίνακας A είναι αντιστρέψιμος

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}.$$

2.8.16. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του A εφαρμόζοντας τον τύπο $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\, adj(A)$:

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad (iii)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

2.8.17. Έστω A, B και C είναι πίνακες 4×4, $det(A) = 3$, $det(B^{-1}) = \frac{3}{4}$, $det(C) = -6$.
Να βρεθούν οι ορίζουσες των πινάκων:

$$A^t,\ \ (A^{-1})^t,\ \ AB,\ \ C^{-1},\ \ 5A,\ \ 4B,\ \ (3A)^{-1}(3B^{-1}),\ \ AB(2C^{-1}),\ \ (2A)^t(4C^{-1}).$$

Κεφάλαιο 3

Επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων με k - εξισώσεις και με n - αγνώστους είναι ένα σύστημα της μορφής:

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n & = & b_k \end{array} \tag{3.1}$$

Οι μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, οι συντελεσές a_{ij} και οι σταθεροί (ελεύθεροι) όροι b_i παίρνουν τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

- Κάθε n-διάστατο διάνυσμα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με συντεταγμένες από το $\mathbb{R}$, οι οποίες επαληθεύουν το σύστημα (3.1), καλείται *λύση του συστήματος*.
- Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων καλείται *συμβατό*, όταν έχει τουλάχιστον μία λύση.
- Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων καλείται *τετραγωνικό*, όταν το πλήθος των εξισώσεων ισούται με το πλήθος των αγνώστων.
- Δύο συστήματα γραμμικών εξισώσεων καλούνται *ισοδύναμα*, όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Σε κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων της μορφής (3.1) μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τρεις πίνακες:

τον *πίνακα συντελεστών*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

τον *πίνακα σταθερών όρων*

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

και τον *επαυξημένο πίνακα*

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{array} \right) \tag{3.4}$$

Δεδομένου ενός επαυξημένου πίνακα $A|b$ με k γραμμές και $n+1$ στήλες, μπορεί να γραφεί σύστημα k εξισώσεις και με n αγνώστους της μορφής (3.1).

Παράδειγμα 3.0.1. Στο σύστημα 3 γραμμικών εξισώσεων με 3 αγνώστους

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

αντιστοιχούν ο πίνακας συντελεστών και ο επαυξημένος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

3.1 Επίλυση τετραγωνικού συστήματος με τη χρήση των πινάκων.

Ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &=& b_n \end{array} \tag{3.5}$$

μπορει να γραφεί σε μορφή πινάκων ως εξής

$$A \cdot X = b, \tag{3.6}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.6) με A^{-1} από αριστερά παίρνουμε διαδοχικά:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b \Longrightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot b \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot b$$

3.2 Επίλυση συστήματος με απαλοιφή αγνώστων (Μέθοδος Gauss).

Η μέθοδος Gauss επίλυσης συστήματος γραμμικών εξισώσεων με απαλοιφή αγνώστων βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.1. *Αν οι πίνακες*

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right) \text{ και } C|d = \left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{j1} & c_{j2} & \dots & c_{jn} & d_j \end{array}\right)$$

είναι γραμμοϊσοδύναμοι, τότε είναι ισοδύναμα και τα αντίστοιχα συστήματα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & \qquad & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & & c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k & & c_{j1}x_1 \quad c_{j2}x_2 \quad \dots \; c_{jn}x_n = d_j \end{array}$$

Για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{cccccccl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n & = & b_k \end{array} \tag{3.7}$$

ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα

1. Γράφουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

2. Φέρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $A|b$ του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή $\widehat{A}|\widehat{b}$.

   Από το Θεώρημα 3.2.1 τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων που αντιστοιχούν στους πίνακες $A|b$ και $\widehat{A}|\widehat{b}$ είναι ισοδύναμα.

3. Υπάρχουν τρία ενδεχόμενα

   (α΄) Ο $\widehat{A}$ έχει n μη μηδενικές γραμμές, δηλαδή $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots, a_{nn} \neq 0$, τότε ο $\widehat{A}|\widehat{b}$ έχει τη μορφή:

$$\widehat{A}|\widehat{b} = \left(\begin{array}{cccccc|c} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} & \dots & \hat{a}_{1\,n-1} & \hat{a}_{1n} & \hat{b}_1 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} & \dots & \hat{a}_{2\,n-1} & \hat{a}_{2n} & \hat{b}_2 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33} & \dots & \hat{a}_{3\,n-1} & \hat{a}_{3n} & \hat{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{a}_{n-1\,n-1} & \hat{a}_{n-1\,n} & \hat{b}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{a}_{nn} & \hat{b}_n \end{array}\right)$$

   Στην περίπτωση αυτή,

$$rank(A) = rank(A|b) = n.$$

   Στο $\widehat{A}|\widehat{b}$ αντιστοιχεί το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \hat{a}_{13}x_3 + \cdots + \hat{a}_{1n-1}x_{n-1} + \hat{a}_{1n}x_n & = & \hat{b}_1 \\ \hat{a}_{22}x_2 + \hat{a}_{23}x_3 + \cdots + \hat{a}_{2n-1}x_{n-1} + \hat{a}_{2n}x_n & = & \hat{b}_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{n-1n-1}x_{n-1} + \hat{a}_{n-1n}x_n & = & \hat{b}_{n-1} \\ \hat{a}_{nn}x_n & = & \hat{b}_n \end{array}$$

   Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $x_n = \dfrac{\hat{b}_n}{\hat{a}_{nn}}$.

   Αντικαθιστώντας x_n στην προτελευταία εξίσωση βρίσκουμε $x_{n-1} = \dfrac{\hat{b}_{n-1} - \hat{a}_{n-1n}\frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_{nn}}}{\hat{a}_{n-1n-1}}$.

   "Ανεβαίνοντας προς τα πάνω" βρίσκουμε διαδοχικά όλους τους αγνώστους.

   Το σύστημα, στην περίπτωση αυτή, έχει μοναδική λύση.

(β′) Το πλήθος k των μη μηδενικών γραμμών του $\widehat{A}$ ισούται με το πλήθος των γραμμών του $\widehat{A}|\widehat{b}$ και $k < n$. Τότε, ο $\widehat{A}|\widehat{b}$ έχει τη μορφή:

$$\widehat{A}|\widehat{b} = \left(\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \hat{a}_{1i_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \hat{a}_{1n} & \hat{b}_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \hat{a}_{2i_2} & \dots & \dots & \dots & \hat{a}_{2n} & \hat{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{a}_{ki_k} & \dots & \hat{a}_{kn} & \hat{b}_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{3.8}$$

Στην περίπτωση αυτή, $rank(A) = rank(A|b) = k < n$.

Οι μεταβλητές $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$ που αντιστοιχούν στα ηγετικά στοιχεία του κλιμακωτού πίνακα (3.8) καλούνται κύριες μεταβλητές, οι υπόλοιπες μεταβλητές καλούνται ελεύθερες.

Για απλούστευση της γραφής υποθέτουμε ότι τα ηγετικά στοιχεία των γραμμών του $\widehat{A}$ είναι τα $\hat{a}_{11}, \hat{a}_{22}, ..., \hat{a}_{kk}$. Τότε το αντίστοιχο στο $\widehat{A}|\widehat{b}$ σύστημα μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \cdots + \hat{a}_{1k}x_k &= \hat{b}_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \hat{a}_{22}x_2 + \cdots + \hat{a}_{2k}x_k &= \hat{b}_2 - a_{2k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ \hat{a}_{kk}x_k &= \hat{b}_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \cdots - a_{kn}x_n \end{aligned} \tag{3.9}$$

Οι μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_k$ στο σύστημα (3.9) είναι οι κύριες. Δίνουμε στις ελεύθερες μεταβλητές του (3.9) αυθαίρετες τιμές

$$x_{k+1} = \mu_{k+1}, x_{k+2} = \mu_{k+2}, ..., x_n = \mu_n.$$

Τότε παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \cdots + \hat{a}_{1n}x_n &= \delta_1 \\ \hat{a}_{22}x_2 + \cdots + \hat{a}_{2k}x_k &= \delta_2 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ \hat{a}_{kk}x_k &= \delta_k \end{aligned}$$

το οποίο ως προς κύριες μεταβλητές έχει μοναδική λύση $x_1 = \mu_1, x_2 = \mu_2, ..., x_k = \mu_k$.

Η λύση του αρχικού συστήματος θα είναι το n-διάστατο διάνυσμα $(\mu_1, ..., \mu_n)$, οι συντεταγμένες του οποίου εξαρτώνται από τις αυθαίρετες τιμές των ελεύθερων μεταβλητών.

Το σύστημα, στην περίπτωση αυτή, έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(γ′) Το πλήθος k των μη μηδενικών γραμμών του $\widehat{A}$ είναι μικρότερο από το πλήθος των γραμμών του $\widehat{A}|\widehat{b}$, δηλαδή το ηγετικό στοιχείο της τελευταίας γραμμής του $\widehat{A}|\widehat{b}$ βρίσκεται στη στήλη b.

Τότε ο $\widehat{A}|\widehat{b}$ έχει την μορφή

$$\widehat{A}|\widehat{b} = \left(\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \hat{a}_{1i_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \hat{a}_{1n} & \hat{b}_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \hat{a}_{2i_2} & \dots & \dots & \dots & \hat{a}_{2n} & \hat{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{ki_k} & \dots & a_{kn} & \hat{b}_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{b}_{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Στην περίπτωση αυτή $rank(A) = k < k + 1 = rank(A|b)$.

Στην τελευταία μη μηδενική γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί η εξίσωση

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = \hat{b}_{k+1} \neq 0,$$

η οποία είναι αδύνατη. Το σύστημα, στην περίπτωση αυτή, δεν έχει λύση.

Πόρισμα 3.2.2. *Έστω ότι A είναι ο πίνακας συντελεστών και ο $A|b$ είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους. Τότε*

1. *Το σύστημα είναι συμβατό $\Longleftrightarrow rank(A) = rank(A|b)$.*
2. *Το σύστημα έχει μοναδική λύση $\Longleftrightarrow rank(A) = rank(A|b) = n$.*

Παραδείγματα 3.2.3.

1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + \ y + \ z &= \ 1 \\ x + 2y + \ z &= -1 \\ x + \ y + 2z &= \ 4 \end{aligned}$$

Έχουμε $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{A_3 \longleftrightarrow A_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{A_2 - A_1}{\overset{A_3 - 2A_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right)$

$$\overset{A_3 + A_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{aligned} x + y + 2z &= \ 4 \\ y - \ z &= -5 \\ -4z &= -12 \end{aligned}$$

Επομένως $z = 3$, $y = -5 + z = -2$ και $x = 4 - y - 2z = 0$.

Άρα, $(0, -2, 3)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x - 4y + \ 5z &= \ 1 \\ 3x - 6y + \ 4z &= -2 \\ 4x - 8y + 17z &= \ 9 \end{aligned}$$

Έχουμε $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 & -2 \\ 4 & -8 & 17 & 9 \end{array}\right) \underset{2A_3 - 4A_1}{\overset{2A_2 - 3A_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 14 & 14 \end{array}\right)$

$$\overset{A_3 + 2A_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{aligned} 2x - 4y + 5z &= \ 1 \\ -7z &= -7 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} + 2y - \tfrac{5}{2}z = 2y - 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις $(2y - 2, y, 1)$.

3. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + z &= \ 1 \\ x + y + z &= -1 \\ x + y + z &= \ 4 \end{aligned}$$

Έχουμε $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{A_2 - A_1}{\overset{A_3 - A_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{aligned} x + \ y + \ z &= \ 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z &= -2 \end{aligned}$

Η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα, το σύστημα δεν έχει λύση.

3.3 Επίλυση συστήματος με τον κανόνα του Cramer.

Θεωρούμε ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad &\ \vdots \ \ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{3.10}$$

Συμβολίζουμε

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

και

$$A_{x_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ i = 1,..,n$$

Ο πίνακας A_{x_i} προκύπτει από τον πίνακα A με αντικατάσταση της i-στήλης του A με την στήλη b των ελεύθερων όρων.

Θεώρημα 3.3.1. *(Κανόνας του Cramer.) Αν $det(A) \neq 0$, τότε το σύστημα (3.10) έχει μοναδική λύση $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, όπου για κάθε $i = 1,..,n$ το x_i βρίσκεται από τον τύπο:*

$$x_i = \frac{det(A_{x_i})}{det(A)}.$$

Παραδείγματα 3.3.2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= 5 \\ 5x - 6y - 4z &= -3 \\ -4x + 5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Έχουμε

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12, \quad det(A_x) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$det(A_y) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -24, \quad det(A_z) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 60$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{det(A_x)}{det(A)} = 1, \quad y = \frac{det(A_y)}{det(A)} = -2, \quad z = \frac{det(A_z)}{det(A)} = 5.$$

Σημείωση 3.3.3.

1. Αν στο σύστημα 3.10 $det(A) = 0$ και υπάρχει $i \in \{1, ..., n\}$ με $det(A_{x_i}) \neq 0$, τότε το σύστημα δεν έχει λύση.

2. Αν στο σύστημα 3.10 $det(A) = 0$ και $det(A_{x_i}) = 0$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$, τότε το σύστημα είτε δεν έχει λύση είτε έχει άπειρο πλήθος λύσεων όπως φαίνεται απί τα δύο παραδείγματα παρακάτω.

Παραδείγματα 3.3.4.

1. Θα διερευνησουμε πόσες λύσεις έχει το σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= 5 \\ 5x - 6y - 4z &= -3 \\ 2x - 10y - 6z &= -8 \end{aligned}$$

Βρίσκουμε

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ 2 & -10 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad det(A_x) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ -8 & -10 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$det(A_y) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 2 & -8 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad det(A_z) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ 2 & -10 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

Έχουμε

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & -6 & -4 & -3 \\ 2 & -10 & -6 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{A_3 \longleftrightarrow A_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -10 & -6 & 5 \\ 5 & -6 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{A_3 + A_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -10 & -6 & 5 \\ 5 & -6 & -4 & -3 \\ 5 & -6 & -4 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{A_3 - A_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -10 & -6 & 5 \\ 5 & -6 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{A_1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -3 & \frac{5}{2} \\ 5 & -6 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{A_2 - 5A_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 19 & 11 & -\frac{31}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Φέρνοντας τον πίνακα $A|b$ σε κλιμακωτή μορφή βλέπουμε ότι $rank(A) = rank(A|b) = 2 < 3 = n$. Άρα το σύστημα έχει άπειρου πλήθους λύσεων σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2.2.

2. Θα διερευνησουμε πόσες λύσεις έχει το σύστημα:

$$\begin{aligned} x + 2y - z + w &= 1 \\ 2x - y + 2z + 2w &= 2 \\ 3x + y + z + 3w &= 3 \\ x - 3y + 3z + w &= 0 \end{aligned}$$

Βρίσκουμε $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

$$det(A_x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad det(A_w) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Φέρνοντας τον πίνακα $A|b$ σε κλιμακωτή μορφή βρίσκουμε ότι $rank(A) = 2$ και $rank(A|b) = 3$, άρα το σύστημα δεν έχει λύση σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2.2.

3.4 Ομογενή συστήματα γραμμικών εξισώσεων.

Ορισμός 3.4.1. Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων καλείται *ομογενές* αν όλοι οι ελεύθεροι όροι του είναι ίσοι με μηδέν.

Κάθε ομογενές σύστημα:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad & \vdots & \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{3.11}$$

είναι συμβατό, αφού η n-άδα $(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0)$ ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις του.

3.4.1 Ομογενές σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους με μη μηδενική λύση.

Από τον κανόνα του Cramer προκύπτει ότι η μηδενική λύση $(x_1, ..., x_n) = (0, \ldots, 0)$ είναι η μοναδική του ομογενούς συστήματος με n εξισώσεις και n αγνώστους:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{3.12}$$

αν και μόνον αν

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Πόρισμα 3.4.2. *Το ομογενές σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους (3.12) έχει μη μηδενική λύση αν και μόνον αν η ορίζουσα των συντελεστών του είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

3.5 Ασκήσεις

3.5.1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων με την μέθοδο Gauss:

$$(i)\quad \begin{array}{ccccccc} & & x & + & z & = & c_1 \\ x & + & y & + & z & = & c_2 \\ & & & & z & = & c_3 \\ & & z & + & w & = & c_4 \end{array}, \qquad (ii)\quad \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 4 \end{array}$$

$$(iii)\quad \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array} \qquad (iv)\quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 31 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 29 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 10 \end{array}$$

3.5.2. Να βρεθεί η τριάδα αριθμών x_1, x_2, x_3 που ικανοποιεί την ισότητα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

από τον τύπο $X = A^{-1}B$, όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3.5.3. Δίνεται σύστημα εξισώσεων $\left\{ \begin{array}{rr} 2x + 3y + 2z = & 0 \\ -x + z = & -2 \\ 2x + y - z = & 1 \end{array} \right.$

(i) Να βρεθούν οι πίνακες A και B για τους οποίους το παραπανω σύστημα εξισώσεων έχει τις ίδιες λύσεις $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$ με την εξίσωση $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = B$.

(ii) Να βρεθεί ο πίνακας A^{-1}.

(iii) Να λυθεί το σύστημα από το τύπο $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B$.

3.5.4. Να λυθούν τα συστήματα με τον κανόνα του Cramer:

$$(i)\quad \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \end{array}, \qquad (ii)\quad \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -4 \\ 4x & + & y & + & 4z & = & -2 \end{array}$$

3.5.5. Να διερευνηθούν τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων:

$$(i)\quad \begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array}, \qquad (ii)\quad \begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array},$$

$$(iii)\quad \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & az & = & 4 \\ 4x & + & (a+5)y & + & (a+3)z & = & 6 \end{array}, \qquad (iv)\quad \begin{array}{ccccccc} kx & + & 2y+ & & z & = & 1 \\ x & + & y+ & & kz & = & 0 \\ x & + & 2y+ & & z & = & 1 \end{array}$$

3.5.6. Να βρεθεί το λ για το οποίο το σύστημα έχει λύση

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & \lambda \end{array}$$

3.5.7. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες οι ευθείες:

$$x + 2y = 1, \quad 2x + (1-\lambda)y = -1, \quad (1-\lambda)x + 3y = 2$$

έχουν μόνο ένα κοινό σημείο και να βρεθεί το σημείο αυτό.

3.5.8. Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A.

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. (i) Θεωρούμε το σύστημα $AX = b$:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & b_1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & b_2 \\ x_3 + 2x_4 & = & b_3 \\ x_4 & = & b_4 \end{array}$$

Με τη μέθοδο απαλοιφής αγνώστων βρίσκουμε

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & b_1 - 2b_2 + b_3 & = 1 \cdot b_1 - 2 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 + 0 \cdot b_4 \\ x_2 & = & b_2 - 2b_3 + b_4 & = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 - 2 \cdot b_3 + 1 \cdot b_4 \\ x_3 & = & b_3 - 2b_4 & = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 - 2 \cdot b_4 \\ x_4 & = & b_4 & = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 1 \cdot b_4 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Όμως $X = A^{-1}b$. Άρα,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5.9. Να διερευνηθεί ποιά από τα παρακάτω συστήματα έχουν μη μηδενικές λύσεις:

$$(i)\ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & 3y & + & 4z & - & w & = & 0 \\ 7x & + & y & - & 8z & + & 9w & = & 0 \\ 2x & + & 8y & + & z & - & w & = & 0 \end{array} \qquad (ii)\ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & 8z & = & 0 \\ & & & & 4z & = & 0 \end{array}$$

$$(iii)\ \begin{array}{rcrcrcl} a_1x & + & a_2y & + & a_3z & = & 0 \\ b_1x & + & b_2y & + & b_3z & = & 0 \end{array} \qquad (iv)\ \begin{array}{rcrcl} 3x & - & 2y & = & 0 \\ 6x & - & 4y & = & 0 \end{array}$$

Μέρος II

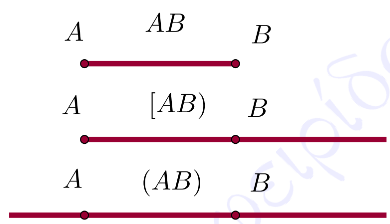
Αναλυτική Γεωμετρία

Κεφάλαιο 4

Διανύσματα του χώρου

Εστω E^3 ο τριδιάστατος Ευκλείδειος χώρος στον οποίο έχει οριστεί μία μονάδα μήκους.
Θεωρούμε δύο σημεία A και B του χώρου. Συμβολίζουμε με

AB – το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα A και B
$|AB|$ – το μήκος του AB
$[AB)$ – την ημιευθεία με αρχή το A η οποία διέρχεται από το B
(AB) – την ευθεία που διέρχεται απο τα σημεία A και B



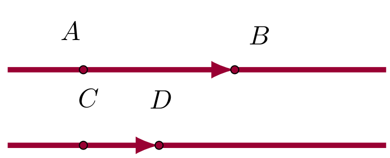
4.1 Εφαρμοστά διανύσματα του χώρου.

Ορισμός 4.1.1. Κάθε διατεταγμένο ζεύγος (A, B) σημείων A και B του χώρου (A το πρώτο σημείο του ζεύγος και B το δεύτερο σημείο του ζεύγος) καλείται *εφαρμοστό διάνυσμα* με αρχή το A και πέρας το B και συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$. Τα εφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$,..., που έχουν την ίδια αρχή και πέρας καλούνται μηδενικά.

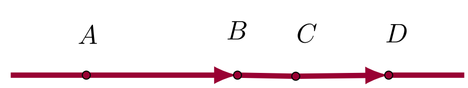
Σχέση μεταξύ των εφαρμοστών διανυσμάτων

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$. Ορίζουμε ότι:

- $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ έχουν την ίδια διεύθυνση όταν είτε $(AB) = (CD)$ είτε $(AB) \parallel (CD)$. Γράφουμε $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$.



$(AB) \parallel (CD)$



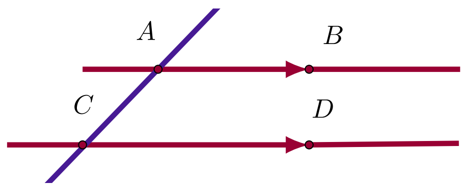
$(AB) = (CD)$

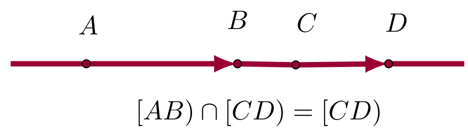
- $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ είναι *ομόρροπα* (έχουν την ίδια φόρα) όταν έχουν την ίδια διεύθυνση και

  (i) είτε οι ευθείες (AB) και (CD) είναι παράλληλες και οι ημιευθείες $[AB)$ και $[CD)$ περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία (AC),

  (ii) είτε τα σημεία A, B, C, D ανήκουν σε μία ευθεία και οι ημιευθείες $[AB)$ και $[CD)$ τέμνονται κατά μία ημιευθεία.

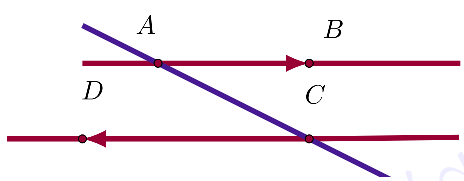
  Γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

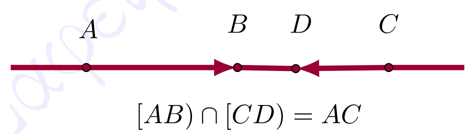




- $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ είναι *αντίρροπα* όταν έχουν την ίδια διεύθυνση και δεν είναι ομόρροπα.

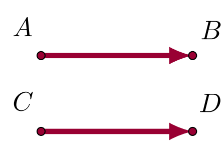
  Γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.





- $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ είναι *ίσα* όταν $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ και $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Γραφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Όλα τα μηδενικά εφαρμοστά διανύσματα θεωρούνται ίσα.

Πρόταση 4.1.2. *Για κάθε εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και για κάθε σημείο C υπάρχει μοναδικό σημείο D τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

Σχέση εφαρμοστού διανύσματος, ευθείας και επιπέδου.

Εστω $\overrightarrow{AB}$ ένα εφαρμοστό διάνυσμα, ε μια ευθεία και π ένα επίπεδο.

- $\overrightarrow{AB} \| \varepsilon$ ($\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο στη ε) $\iff (AB) \| \varepsilon$ ή $(AB) = \varepsilon$.

- $\overrightarrow{AB} \| \pi$ ($\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο στο π) $\iff (AB) \| \pi$ ή $(AB) \subseteq \pi$.

4.2 Ελεύθερα διανύσματα.

Πρόταση 4.2.1. *Η ισότητα των εφαρμοστών διανυσμάτων είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των εφαρμοστών διανυσμάτων του χώρου, δηλαδή ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:*

(*i*) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ *ανακλαστική ιδιότητα*

(*ii*) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ *συμμετρική ιδιότητα*

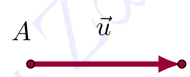
(*iii*) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *και* $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EZ} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EZ}$ *μεταβατική ιδιότητα*

Ορισμός 4.2.2. Κάθε κλάση ισοδυναμίας ως προς τη σχέση ισοδυναμίας " = " στο σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων του χώρου καλείται ελεύθερο διάνυσμα.

Τα ελεύθερα διανύσματα συμβολίζουμε με $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, ... κ.τ.λ..

Συμβολίζουμε με $\vec{0}$ το ελεύθερο διάνυσμα που περιέχει τα μηδενικά εφαρμοστά διανύσματα: $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, ... κ.τ.λ..

Θα γράφουμε $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ για να δηλώσουμε ότι συμβολίσαμε με $\vec{u}$ το ελεύθερο διάνυσμα που ορίζεται από το $\overrightarrow{AB}$.



Πρόταση 4.2.3. *Για κάθε διάνυσμα* $\vec{u}$ *και για κάθε σημείο* A *υπάρχει μοναδικό σημείο* B *τέτοιο ώστε* $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$.

Ορισμός 4.2.4. Εστω $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δύο ελεύθερα διανύσματα, ε μια ευθεία του χώρου και π ένα επίπεδο του χώρου.

(*a*) $\vec{u} \| \vec{v}$ ($\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι παράλληλα) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$, όπου $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ και $\overrightarrow{CD} \in \vec{v}$.

(*b*) $\vec{u} \| \varepsilon$ ($\vec{u}$ είναι παράλληλο στη ε) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \| \varepsilon$, όπου $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$.

(*c*) $\vec{u} \| \pi$ ($\vec{u}$ είναι παράλληλο στο π) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \| \pi$, όπου $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$.

(*d*) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι συνεπίπεδα $\Longleftrightarrow$ αν υπάρχει επίπεδο π τέτοιο ώστε $\vec{u} \| \pi$, $\vec{v} \| \pi$ και $\vec{w} \| \pi$.

Θεωρούμε ότι το μηδενικό ελεύθερο διάνυσμα $\vec{0}$ είναι παράλληλο σε κάθε ελέυθερο διάνυσμα, σε κάθε ευθεία και σε κάθε επίπεδο.

Παρατήρηση 4.2.5. Για οποιαδήποτε ελεύθερα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ υπάρχει επίπεδο π τέτοιο ώστε $\vec{u} \| \pi$ και $\vec{v} \| \pi$.

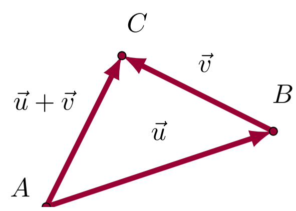
Άθροισμα δυο ελεύθερων διανυσμάτων

Το άθροισμα δυο ελεύθερων διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ορίζεται ως εξής:

(i) Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A του χώρου.

(ii) Υπάρχει μοναδικό σημείο B τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$.

(iii) Υπάρχει μοναδικό σημείο C τέτοιο ώστε $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$.



Το ελεύθερο διάνυσμα που περιέχει το $\overrightarrow{AC}$ καλείται άθροισμα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ και συμβολίζεται με $\vec{u}+\vec{v}$.

Γινόμενο πραγματικού αριθμού επί ελεύθερο διάνυσμα

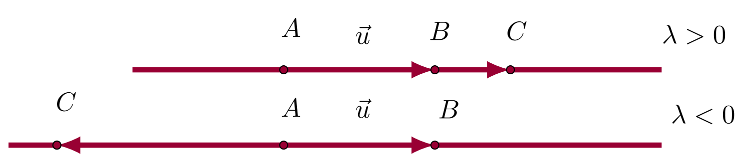
Το γινόμενο ενός ελεύθερου διανύσματος $\vec{u} \neq \vec{0}$ επί $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:
θεωρούμε $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ και ένα σημείο C της ευθείας (AB) τέτοιο ώστε

(i) $|\overrightarrow{AC}| = |\lambda||\overrightarrow{AB}|$

(ii) $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, αν $\lambda > 0$,

(iii) $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, αν $\lambda < 0$,

(iv) $C = A$, αν $\lambda = 0$



Το ελεύθερο διάνυσμα που περιέχει το $\overrightarrow{AC}$ καλείται γινόμενο του λ επί του $\vec{u}$ και συμβολίζεται $\lambda\vec{u}$ ή με $\lambda \cdot \vec{u}$. Ορίζουμε $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.3 Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 4.3.1. Έστω V ένα σύνολο και έστω ότι για κάθε $\vec{u}, \vec{v} \in V$ έχει οριστεί στοιχείο $\vec{u} + \vec{v} \in V$ και για κάθε $\vec{u} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει οριστεί στοιχείο $\lambda \cdot \vec{u} \in V$. Το σύνολο V μαζί με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ καλείται διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$, αν

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\exists \vec{0} \in V$, τέτοιο ώστε $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, $\forall \vec{u} \in V$,
4. $\forall \vec{u} \in V$, $\exists -\vec{u} \in V$, τέτοιο ώστε $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$,
5. $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{u} \in V$,
6. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$,
7. $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{u} \in V$,
8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Το στοιχείο $\vec{0}$ με την ιδιότητα (3) καλείται ουδέτερο στοιχείο του V.

Για κάθε $\vec{u} \in V$ το στοιχείο $-\vec{u}$ με την ιδιότητα (4) καλείται αντίθετο του $\vec{u}$.

Θεώρημα 4.3.2. *Το σύνολο V_3 όλων των ελεύθερων διανυσμάτων του Ευκλείδιου χώρου είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.*

Θεώρημα 4.3.3. *Το σύνολο V_π όλων των ελεύθερων διανυσμάτων παράλληλων σ΄ ένα επίπεδο π είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.*

Θεώρημα 4.3.4. *Το σύνολο V_ε όλων των ελεύθερων διανυσμάτων παράληλων σε μια ευθεία ε είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.*

Θεώρημα 4.3.5. *Για κάθε διανυσματικό χώρο $(V, +, \cdot)$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *Το ουδέτερο στοιχεό $\overrightarrow{0}$ είναι μοναδικό.*

(ii) *Για κάθε $\vec{u} \in V$ το αντίθετο στοιχείο $-\vec{u}$ είναι μοναδικό.*

(iii) $0 \cdot \vec{u} = \overrightarrow{0}$ *για κάθε* $\vec{u} \in V$.

(iv) $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$

(v) $-\vec{u} = (-1) \cdot \vec{u}$ *για κάθε* $\vec{u} \in V$

(vi) $\lambda \cdot \vec{u} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \lambda = 0$ *ή* $\vec{u} = \vec{0}$.

4.4 Γραμμική εξάρτηση στοιχείων διανυσματικού χώρου.

Η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης των στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου μας επιτρέπει να μιλάμε για το άθροισμα των τριών διανυσμάτων:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Με επαγωγή ορίζεται το άθροισμα οποιουδήποτε αριθμού διανυσμάτων:

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_n = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_{n-1}) + \vec{u}_n$$

Από τις ιδιότητες του διανυσματικού χώρου προκύπτει ότι μπορούμε να απλοποιούμε τις εξισώσεις και της παραστάσεις που περιέχουν διανύσματα-στοιχεία διανυσματικού χώρου όπως και τις εξισώσεις και τις παραστάσεις που περιέχουν μόνο αροιθμούς: να τοποθετούμε παρενθέσεις, να αντιμεταθέτουμε τους όρους ενός αθροίσματος, να μεταφέρουμε τους όρους από ένα μέλος μιας ισότητας στο άλλο αλλάζοντας πρόσημο.

Ορισμός 4.4.1. Έστω ότι $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο $\mathbb{R}$.
Κάθε άθροισμα της μορφής

$$\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n$$

καλείται γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ με συντελεστές $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Κάθε γραμμικός συνδυασμός $\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n$ των στοιχείων $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι στοιχείο του V. Για κάθε πεπερασμένο σύνολο σύνολο $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου V υπάρχουν $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0}$. Πράγματι, αρκεί να θέσουμε $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, οπότε $0 \cdot \vec{u}_1 + ... + 0 \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$.

Ο γραμμικός συνδυασμός $0 \cdot \vec{u}_1 + ... + 0 \cdot \vec{u}_n$ καλείται τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$.

Ορισμός 4.4.2. Το διανύσματα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ καλούνται γραμμικώς εξαρτημένα, αν υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός αυτών ίσος με το διάνυσμα $\vec{0}$.

Δηλαδή αν υπάρχουν $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε:

$$(i)\ \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0},\ (ii)\ |\lambda_1| + ... + |\lambda_n| \neq 0$$

Ορισμός 4.4.3. Το διανύσματα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα, αν ο μόνος γραμμικός συνδυασμός αυτών ίσος με το διάνυσμα $\vec{0}$ είναι ο τετριμμένος. Δηλαδή

$$\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0} \Longleftrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

Παραδείγματα 4.4.4.

1. Αν $\vec{u} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{u}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
   Πράγματι, αν $\lambda\vec{u} = \vec{0}$, τότε επειδή $\vec{u} \neq \vec{0}$ είναι $\lambda = 0$.
2. Αν $\vec{u} \parallel \vec{v}$, τότε $\vec{u}, \vec{v}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
   Πράγματι,
   - (i) Αν $\vec{u} = \vec{0}$, τότε $1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$ είναι μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ίσος με το $\vec{0}$.
   - (ii)Αν $\vec{v} = \vec{0}$, τότε $0 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$ είναι μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ίσος με το $\vec{0}$.
   - (iii) Αν $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι δύο μη μηδενικά παράλληλα διανύσματα, τότε $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Άρα, $1 \cdot \vec{u} - \lambda\vec{v}$ είναι μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ίσος με το $\vec{0}$.

Βασικές προτάσεις για την γραμμική εξάρτηση.

Έστω ότι $\vec{u}, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}$ είναι στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου πάνω στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 4.4.5. *Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι $\vec{0}$, τότε τα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.*

Απόδειξη. Έστω π.χ. $\vec{u}_1 = \vec{0}$, τότε

$$1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + ... + 0 \cdot \vec{u}_n = \vec{0},$$

όπου ο γραμμικός συνδυασμός $1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + ... + 0 \cdot \vec{u}_n$ είναι μη τετριμμένος. □

Πρόταση 4.4.6. *Τα διανύσματα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$, $n \geq 2$, είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε και μόνον τότε, όταν ένα από τα διανύσματα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων.*

Απόδειξη. Αν $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, τότε υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, τέτοιοι ώστε $|\lambda_1| + |\lambda_2| + ... + |\lambda_n| \neq 0$ και

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0}.$$

Αφού $\lambda_i \neq 0$, $\vec{u}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\vec{u}_1 - ... - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\vec{u}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\vec{u}_{i+1} - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{u}_n$.

Αντιστρόφως, αν $\vec{u}_i = \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_{i-1}\vec{u}_{i-1} + \lambda_{i+1}\vec{u}_{i+1} + ... + \lambda_n\vec{u}_n$, τότε

$$\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_{i-1}\vec{u}_{i-1} + (-1)\vec{u}_i + \lambda_{i+1}\vec{u}_{i+1} + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0}.$$

Ο τελευταίος γραμμικός συνδυασμός είναι μη τετριμμένος, άρα $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. □

Πρόταση 4.4.7. *Αν $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, \vec{u}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε $\vec{u}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$.*

Απόδειξη. Αφού το σύνολο $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, \vec{u}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda$, τέτοιοι ώστε $|\lambda_1| + ... + |\lambda_n| + |\lambda| \neq 0$ και

$$\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n + \lambda\vec{u} = \vec{0}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $\lambda = 0$. Τότε $\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0}$.

Από την υπόθεση το σύνολο $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, άρα $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Οπότε $|\lambda_1| + ... + |\lambda_n| + |\lambda| = 0$, που είναι άτοπο. Συνεπώς $\lambda \neq 0$ και άρα

$$\vec{u} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{u}_1 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda}\vec{u}_n.$$

□

Πρόταση 4.4.8. *Αν τα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και*

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n,$$

τότε οι αριθμοί $\lambda_1, ..., \lambda_n$ είναι μοναδικοί.

Απόδειξη. $\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n$ και $\vec{u} = \lambda_1'\vec{u}_1 + ... + \lambda_n'\vec{u}_n$. Τότε

$$(\lambda_1 - \lambda_1')\vec{u}_1 + ... + (\lambda_n - \lambda_n')\vec{u}_n = \vec{0}.$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έπεται ότι

$$\lambda_1 - \lambda_1' = ... = \lambda_n - \lambda_n' = 0,$$

δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_1', ..., \lambda_n = \lambda_n'$. □

Πρόταση 4.4.9. *Αν $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Εστω

$$\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0} \tag{4.1}$$

Θα δείξουμε ότι $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

Από την 4.1 έπεται ότι $\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n + 0\vec{u}_{n+1} = \vec{0}$.

Επειδή $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, u_{n+1}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Συνεπώς το σύνολο $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. □

Πρόταση 4.4.10. *Αν $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.*

Απόδειξη. Αν το $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, τότε υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, ..., \lambda_n$ τέτοιοι ώστε $|\lambda_1| + |\lambda_2| + ... + |\lambda_n| \neq 0$ και

$$\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0}.$$

Για $\lambda_{n+1} = 0$ παίρνουμε $|\lambda_1| + ... + |\lambda_n| + |\lambda_{n+1}| = |\lambda_1| + ... + |\lambda_n| \neq 0$ και

$$\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n + \lambda_{n+1}\vec{u}_{n+1} = \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0}.$$

Άρα το σύνολο $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. □

4.5 Γεωμετρική ερμηνεία της γραμμικής εξάρτησης

Πρόταση 4.5.1. *Ένα ελεύθερο διάνυσμα $\vec{u}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, τότε και μόνο τότε όταν $\vec{u} = \vec{0}$.*

Πρόταση 4.5.2. *Δύο ελεύθερα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και μόνο τότε όταν $\vec{u}_1 \| \vec{u}_2$.*

Πρόταση 4.5.3. *Τρία ελεύθερα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και μόνον τότε όταν τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι συνεπίπεδα.*

Απόδειξη. Αν $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε ένα από τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων. Εστω, π.χ., $\vec{u}_3 = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2$. Υπάρχει επίπεδο π, τέτοιο ώστε $\vec{u}_1 \| \pi$ και $\vec{u}_2 \| \pi$. Τότε $\vec{u}_3 \| \pi$. Δηλαδή τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι συνεπίπεδα.

Αντίστροφα, αν τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι συνεπίπεδα, τότε είναι παράλληλα σε ένα επίπεδο π.

Αν δύο από τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι παράλληλα, τότε δύο από τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα, και τα τρία διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Έστω ότι τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι ανά δύο μη παράλληλα. Τότε τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι μη μηδενικά, διότι αν π.χ. $\vec{u}_1 = \vec{0}$, τότε $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ που είναι άτοπο αφου υποθέσαμε ότι τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι ανά δύο μη παράλληλα. Εφαρμόζουμε τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ σε ένα σημείο $O \in \pi$. Μπορεί να κατασκευαστεί ένα παραλληλόγραμμο με διαδοχικές κορυφές $O, A, B, C \in \pi$ έτσι ώστε $\overrightarrow{OA} = \lambda_1\vec{u}_1$, $\overrightarrow{OC} = \lambda_2\vec{u}_2$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{u}_3$.

Τότε $\vec{u}_3 = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2$. Άρα, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. □

Πρόταση 4.5.4. *Τέσσερα ελεύθερα διανύσματα του χώρου είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα.*

Απόδειξη. Εστω $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ τέσσερα δυανύσματα του χώρου.

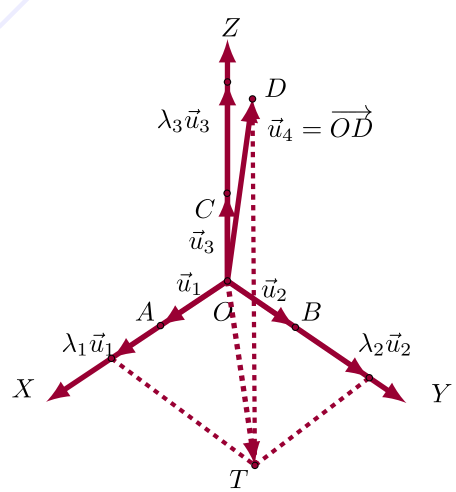
Αν τρία από τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ είναι συνεπίπεδα, τότε τρία από τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, άρα και $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα από την πρόταση 1.3.6.

Εστω τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ είναι ανά τρία μη συνεπίπεδα. Τότε τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ είναι ανά τρία γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ είναι ανά δυο γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή ανά δυο μη παράλληλα.

Θεωρούμε σημεία O,A,B,C,D του χώρου τέτοια ώστε

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA},\ \vec{u}_2 = \overrightarrow{OB},\ \vec{u}_3 = \overrightarrow{OC},\ \vec{u}_4 = \overrightarrow{OD}$$

Εστω T το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από το σημείο D και είναι παράλληλη στο $\vec{u}_3$ με το επίπεδο των σημείων O, A, B. Τότε $\overrightarrow{TD} = \lambda_3\vec{u}_3$ και $\overrightarrow{OT} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2$.



Άρα,

$$\vec{u}_4 = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TD} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3.$$

Δηλάδη το $\vec{u}_4$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, συνεπώς τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. □

4.6 Βαση διανυσματικού χώρου και συντεταγμένες διανύσματος.

Ορισμός 4.6.1. Το σύνολο $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου V καλείται βάση του V, όταν:

1. $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,
2. $\vec{u} = \lambda_1\vec{e}_1 + ... + \lambda_n\vec{e}_n$, για κάθε $\vec{u} \in V$.

Πόρισμα 4.6.2. *Οποιαδήποτε τρία μη συνεπίπεδα ελεύθερα διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ του συνόλου V_3 όλων των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου αποτελούν μία βάση του V_3.*

Πόρισμα 4.6.3. *Οποιαδήποτε δύο μη παράλληλα ελεύθερα διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ του συνόλου V_π όλων των ελεύθερων διανυσμάτων ενός επιπέδου π αποτελούν μία βάση του V_π.*

Πόρισμα 4.6.4. *Οποιοδήποτε μη μηδενικό ελεύθερο διάνυσμα $\vec{e}_1$ του συνόλου V_ε όλων των ελεύθερων διανυσμάτων μιας ευθείας ε αποτελούν μία βάση του V_ε.*

Ορισμός 4.6.5. Έστω ότι $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ είναι μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο $\mathbb{R}$ και $\vec{u} \in V$.

Αν $\vec{u} = a_1\vec{e}_1 + ... + a_n\vec{e}_n$, τότε οι αριθμοί $a_1, ..., a_n$ καλούνται συντεταγνένες του $\vec{u}$ ως προς $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$. Γράφουμε τότε $\vec{u} = \{a_1, ..., a_n\}$.

Θεώρημα 4.6.6. *Αν $\vec{u} = \{a_1, ..., a_n\}$ και $\vec{v} = \{b_1, ..., b_n\}$ ως προς μία βάση $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, τότε $\vec{u} + \vec{v} = \{a_1 + b_1, ..., a_n + b_n\}$ και $\lambda\vec{u} = \{\lambda a_1, ..., \lambda a_n\}$*

Απόδειξη. $\vec{u} = \{a_1, ..., a_n\}$ και $\vec{v} = \{b_1, ..., b_n\} \Longrightarrow$
$\vec{u} = a_1\vec{e}_1 + ... + a_n\vec{e}_n$ και $\vec{v} = b_1\vec{e}_1 + ... + b_n\vec{e}_n \Longrightarrow$
$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + ... + (a_n + b_n)\vec{e}_n$ και $\lambda\vec{u} = \lambda a_1\vec{e}_1 + ... + \lambda a_n\vec{e}_n \Longrightarrow$
$\vec{u} + \vec{v} = \{a_1 + b_1, ..., a_n + b_n\}$ και $\lambda\vec{u} = \{\lambda a_1, ..., \lambda a_n\}$. □

Συντεταγμένες ελεύθερου διανύσματος.

Έστω $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ τρία μη συνεπίπεδα ελεύθερα διανύσματα του χώρου. Τότε η τριάδα $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου όλων των ελεύθερων διανυσμάτων.

Για κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\vec{a}$ υπάρχουν $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ με $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

Γράφουμε τότε $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Πρόταση 4.6.7. *Τα ελεύθερα διανύσματα $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ και $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα (παράλληλα) αν και μόνον αν*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

Απόδειξη. Αν $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ και $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ ή $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Επομένως $\{a_1, a_2, a_3\} = \{\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3\}$ ή $\{b_1, b_2, b_3\} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$. Άρα, ισχυεί ο τύπος (4.2).

Αντίστροφα, από το τύπο (4.2) έπεται ότι $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$, $a_3b_1 - a_1b_3 = 0$. Επομένως ισχύει μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
ή $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \lambda$, ή $a_1 = b_1 = 0$ και $\dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \lambda$,
ή $a_2 = b_2 = 0$ και $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_3}{b_3} = \lambda$, ή $a_3 = b_3 = 0$ και $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \lambda$
ή $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ και $\dfrac{a_3}{b_3} = \lambda$, ή $a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$ και $\dfrac{a_1}{b_1} = \lambda$
ή $a_1 = b_1 = a_3 = b_3 = 0$ και $\dfrac{a_2}{b_2} = \lambda$, ή $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.
Σε κάθε περίπτωση $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ ή $\vec{b} = \overrightarrow{0}$. Άρα, $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα □

Πρόταση 4.6.8. *Τα ελεύθερα διανύσματα* $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ *και* $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ *είναι γραμμικώς εξαρτημένα (συνεπίπεδα) αν και μόνον αν*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Απόδειξη. Τα διανύσματα $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ και $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνον αν υπάρχουν $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}$ και $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0$. Ισοδύναμα, $\lambda_1\{a_1, a_2, a_3\} + \lambda_2\{b_1, b_2, b_3\} + \lambda_3\{c_1, c_2, c_3\} = \vec{0}$ και $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1 &= 0 \\ \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2 &= 0 \\ \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3 c_3 &= 0 \end{aligned}$$

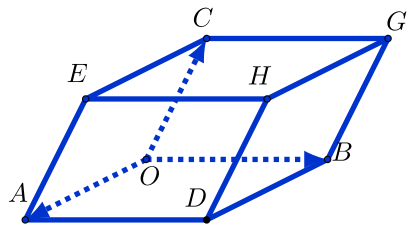
έχει και άλλη λύση εκτός την $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$, που είναι ισοδύναμο με την συνθήκη:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

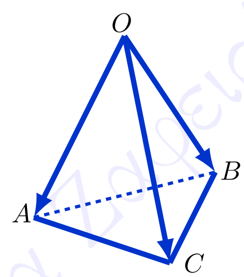
□

4.7 Ασκήσεις.

4.7.1. Έστω $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$ μη συνεπίπεδα διανύσματα του χώρου και P το παραλληλεπίπεδο πάνω στα διανύσματα αυτά. Να βρεθούν ως προς βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ οι συντεταγμένες των διανυσμάτων που έχουν ως αρχή το σημείο C και συμπίπτουν με τις ακμές του P, με τις διαγωνίους των εδρών, με τη διαγώνιο του P.



4.7.2. Έστω $OABC$ ένα τετράεδρο, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$.



Να βρεθούν ως προς βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ οι συντεταγμένες των διανυσμάτων:

(α) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

(β) $\overrightarrow{DE}$, όπου D είναι το μέσο του OA και E είναι το μέσο του BC,

(γ) $\overrightarrow{DF}$, όπου F είναι το σημείο τομής των διαμέσων της έδρας BOC,

(δ) $\overrightarrow{AE}$, όπου E είναι το μέσο του BC,

(ε) $\overrightarrow{OM}$, όπου M είναι η τομή των διαμέσων της έδρας ABC.

4.7.3. Έστω $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στη διχοτόμο της γωνίας AOB, το οποίο να είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Λύση. Έστω A' ένα σημείο της ημιευθείας $[OA)$ και B' ένα σημείο της ημιευθείας $[OB)$, τέτοια ώστε

$$|\overrightarrow{OA'}| = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad |\overrightarrow{OB'}| = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Έστω M η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου πάνω στα διανύσματα $\overrightarrow{OA'}$ και $\overrightarrow{OB'}$. Τότε $A'OB'M$ είναι ρόμβος και συνεπώς η ημιευθεία $[OM)$ είναι διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου $A'OB'$. Άρα, $[OM)$ είναι διχοτόμος της AOB και το ζητούμενο διάνυσμα είναι

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} + \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$$

4.7.4. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $x\vec{a}-y\vec{b}, z\vec{b}-x\vec{c}, y\vec{c}-z\vec{a}$ είναι συνεπίπεδα για κάθε τριάδα διανυσμάτων $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ και για κάθε τριάδα αριθμών x,y,z.

4.7.5. Έστω $\vec{a}=\{1,5,3\}$, $\vec{b}=\{6,-4,-2\}$, $\vec{c}=\{0,-5,7\}$, $\vec{d}=\{-20,27,-35\}$.

Να προσδιοριστούν οι αριθμοί x,y,z έτσι ώστε τα διανύσματα $x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}, \vec{d}$ να σχηματίζουν κλειστή τεθλασμένη γραμμή αν κάθε επόμενο διάνυσμα έχει ως αρχή το πέρας του προηγούμενου.

4.7.6. Να προσδιοριστεί σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα και στην περίπτωση που αυτό είναι δυνατόν να εκφραστεί το διάνυσμα $\vec{c}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

(i) $\vec{a}=\{5,2,1\},\vec{b}=\{-1,4,2\},\vec{c}=\{-1,-1,6\}$

(ii) $\vec{a}=\{1,2,3\},\vec{b}=\{4,5,6\},\vec{c}=\{2,4,6\}$

(iii) $\vec{a}=\{6,-18,12\},\vec{b}=\{-8,24,-16\},\vec{c}=\{8,7,3\}$

(iv) $\vec{a}=\{6,-18,12\},\vec{b}=\{-8,24,-16\},\vec{c}=\{3,-9,4\}$

(v) $\vec{a}=\{6,4,2\},\vec{b}=\{-9,6,3\},\vec{c}=\{-3,6,3\}$

4.7.7. Να αποδειχθεί ότι το σημείο O είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου ABC αν και μόνον αν

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$$

4.7.8. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\in V$. Να αποδειχθεί ότι αν υπάρχει $\vec{v}\in V$ που γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γαραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n$, τότε τα στοιχεία $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Κεφάλαιο 5

Συστήματα συντεταγμένων

5.1 Προβολές.

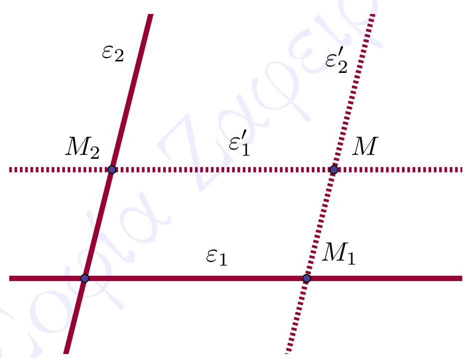
Από τον αλγεβρικό ορισμό των συντεταγμένων ενός διανύσματος θα περάσουμε στην γεωμετρική περιγραφή, ο συνδετικός κρίκος είναι η έννοια της προβολής.

Προβολή σημείου στην ευθεία.

Έστω ε_1 και ε_2 δύο μη παράλληλες ευθείες ενός επιπέδου π και M ένα σημείο του π .

Από το M φερνουμε μια ευθεία ε_2' παράλληλη στην ε_2. Η ε_2' τέμνει την ε_1 σε ένα σημείο M_1. Το M_1 καλείται προβολή του M στην ε_1 παράλληλα στην ε_2, γράφουμε $M_1 = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} M$.

Αν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$, τότε το σημείο M_1 καλείται *ορθογώνια προβολή* του M στην ευθεία ε_1.



Προβολή διανύσματος στην ευθεία.

Έστω $\overrightarrow{MN}$ ένα εφαρμοστό διάνυσμα του επιπέδου και M_1 και N_1 είναι οι προβολές των M και N, αντίστοιχα, στην ε_1 παράλληλα στην ε_2. Το διάνυσμα $\overrightarrow{M_1N_1}$ καλείται προβολή του $\overrightarrow{MN}$ στην ε_1 παράλληλα στην ε_2. Γράφουμε $\overrightarrow{M_1N_1} = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\overrightarrow{MN}$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 5.1.1. *Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, τότε $\text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\overrightarrow{AB} = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\overrightarrow{CD}$.*

Έστω $\vec{u}$ ένα ελεύθερο διάνυσμα του επιπέδου και $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$. Αν $\overrightarrow{M_1N_1} = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\overrightarrow{MN}$, τότε το ελεύθερο διάνυσμα $\vec{u}_1 = \overrightarrow{M_1N_1}$ καλείται προβολή του $\vec{u}$ στην ε_1 παράλληλα στην ε_2. Γράφουμε $\vec{u}_1 = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\vec{u}$.

Από την Πρόταση 5.1.1 προκύπτει ότι το διάνυσμα $\text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\vec{u}$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του $\overrightarrow{MN} \in \vec{u}$.

Από τον ορισμό της προβολής ενός ελεύθερου διανύσματος πάνω σε μια ευθεία παράλληλα σε μια άλλη ευθεία συμπεραίνουμε ότι:

1. $\vec{u} = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\vec{u} + \text{πρ}_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}\vec{u}$
2. $\text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\vec{u} + \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\vec{v}$
3. $\text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}(\lambda\vec{u}) = \lambda\text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\vec{u}$

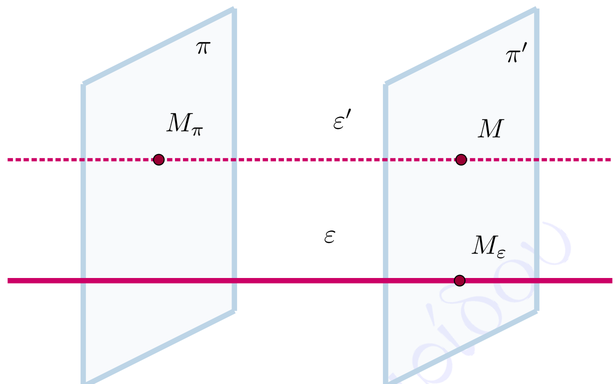
Προβολή σημείου στο επίπεδο.

Έστω π ένα επίπεδο και ε μια ευθεία μη παράλληλη στο π. Από ένα σημείο M του χώρου φέρνουμε μια ευθεία $\varepsilon' \parallel \varepsilon$ και ένα επίπεδο $\pi' \parallel \pi$. Θεωρούμε τα σημεία $M_\varepsilon = \varepsilon \cap \pi'$ και $M_\pi = \pi \cap \varepsilon'$.

Το M_ε καλείται προβολή του M στην ε παράλληλα στο π, γράφουμε $M_\varepsilon = \text{πρ}_\varepsilon^\pi M$.

Το M_π καλείται προβολή του M στο π παράλληλα στην ε, γράφουμε $M_\pi = \text{πρ}_\pi^\varepsilon M$.

Αν $\varepsilon \perp \pi$, τότε M_π καλείται *ορθογώνια προβολή του M στο επίπεδο* Π.



Προβολή διανύσματος στο επίπεδο.

Η προβολή του $\overrightarrow{MN}$ στην ε παράλληλα στο π είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{M_\varepsilon N_\varepsilon}$. Γράφουμε $\overrightarrow{M_\varepsilon N_\varepsilon} = \text{πρ}_\varepsilon^\pi \overrightarrow{MN}$.

Η προβολή του $\overrightarrow{MN}$ στο π παράλληλα στην ε είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{M_\pi N_\pi}$. Γράφουμε $\overrightarrow{M_\pi N_\pi} = \text{πρ}_\pi^\varepsilon \overrightarrow{MN}$.

Έστω $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ και $\overrightarrow{M_\varepsilon N_\varepsilon} = \text{πρ}_\varepsilon^\pi \overrightarrow{MN}$, τότε $\vec{u}_\varepsilon = \overrightarrow{M_\varepsilon N_\varepsilon}$ καλείται προβολή του $\vec{u}$ στην ε παράλληλα στο π. Γράφουμε $\vec{u}_\varepsilon = \text{πρ}_\varepsilon^\pi \vec{u}$.

Αν $\overrightarrow{M_\pi N_\pi} = \text{πρ}_\pi^\varepsilon \overrightarrow{MN}$, τότε $\vec{u}_\pi = \overrightarrow{M_\pi N_\pi}$ καλείται προβολή του $\vec{u}$ στην π παράλληλα στην ε. Γράφουμε $\vec{u}_\pi = \text{πρ}_\pi^\varepsilon \vec{u}$.

Οι προβολές των ελεύθερων διανυσμάτων έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\text{πρ}_\varepsilon^\pi(\vec{u}+\vec{v}) = \text{πρ}_\varepsilon^\pi \vec{u} + \text{πρ}_\varepsilon^\pi \vec{v}$ και $\text{πρ}_\varepsilon^\pi(\lambda\vec{u}) = \lambda \text{πρ}_\varepsilon^\pi \vec{u}$

2. $\text{πρ}_\pi^\varepsilon(\vec{u}+\vec{v}) = \text{πρ}_\pi^\varepsilon \vec{u} + \text{πρ}_\pi^\varepsilon \vec{v}$ και $\text{πρ}_\pi^\varepsilon(\lambda\vec{u}) = \lambda \text{πρ}_\pi^\varepsilon \vec{u}$

3. Αν ε_1, ε_2, ε_3 είναι μη παράλληλες ανά δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο O και π_1, π_2, π_3 είναι τα επίπεδα που ορίζονται από τα ζεύγη ευθειών $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ αντίστοιχα, τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ ισχύει
$$\vec{u} = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\pi_2} \vec{u} + \text{πρ}_{\varepsilon_2}^{\pi_3} \vec{u} + \text{πρ}_{\varepsilon_3}^{\pi_1} \vec{u}$$

Παράδειγμα 5.1.2. Έστω $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ μη συνεπίπεδα διανύσματα του χώρου.

Έστω $\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{u}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{u}_3 = \overrightarrow{OC}$. Τα σημεία A, B, C ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο. Έστω O' είναι η κορυφή απέναντι της O. Για $\vec{u} = \overrightarrow{OO'}$ ισχύει $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

Στο παράδειγμα αυτό βασίζεται η απόδειξη της ιδιότητας 3 παραπάνω.

5.2 Γενικά συστήματα συντεταγμένων

Στην ευθεία

Έστω ϵ μια ευθεία, $O \in \epsilon$ και $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$ ένα διάνυσμα παράλληλο στην ϵ.

Το ζεύγος $\{O, \vec{e}_1\}$ καλείται γενικό σύστημα συντεταγμένων της ϵ και συμβολίζεται και με $O\vec{e}_1$.

Το ζεύγος $\{\epsilon, O\vec{e}_1\}$ καλείται άξονας συντεταγμένων.

Ένας άξονας συντεταγμένων συμβολίζεται με Ox, ή Oy, ή Oz κ.τ.λ..

Επειδή $\{\vec{e}_1\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου της ϵ, για κάθε $M \in \epsilon$ υπάρχει αριθμός x_M τέτοιος ώστε $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{e}_1$. Ο αριθμός x_M καλείται συντεταγμένη του M ως προς $O\vec{e}_1$. Γράφουμε $M = (x_M)$.

Πρόταση 5.2.1. *Αν $M = (x_M)$ και $N = (x_N)$ ως προς το σύστημα $O\vec{e}_1$, τότε*

$$\overrightarrow{MN} = \{x_N - x_M\} \text{ και } |\overrightarrow{MN}| = |x_N - x_M||e_1|.$$

Πρόταση 5.2.2. *Αν $M = (x_M)$ και $N = (x_N)$ ως προς το σύστημα $O\vec{e}_1$ και $|\vec{e}_1| = 1$, τότε*

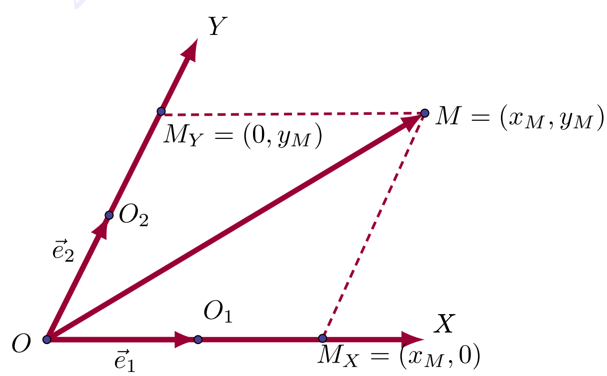
$$|\overrightarrow{MN}| = |x_N - x_M|.$$

Στο επίπεδο.

Έστω π ένα επίπεδο. Η τριάδα $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, όπου $O \in \pi$ και $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ δύο μη παράλληλα διανύσματα του π, καλείται γενικό σύστημα συντεταγμένων του π και συμβολίζεται και με $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

Επειδή $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου του π, για κάθε σημείο $M \in \pi$ υπάρχουν αριθμοί x_M, y_M, τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{OM} = x_M \vec{e}_1 + y_M \vec{e}_2.$$



Οι αριθμοί x_M, y_M καλούνται συντεταγμένες (πρώτη και δεύτερη, αντίστοιχα) του M ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Γράφουμε $M = (x_M, y_M)$.

Έστω O_1 και O_2 σημεία του π τέτοια ώστε $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OO_1}$ και $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OO_2}$. Οι άξονες συντεταγμένων $\{(OO_1), O\vec{e}_1\}$ και $\{(OO_2), O\vec{e}_2\}$ συμβολίζονται με Ox και Oy, αντίστοιχα.

Έστω $M_x = \text{πρ}_{Ox}^{Oy} M$ και $M_y = \text{πρ}_{Oy}^{Ox} M$. Αν x είναι οι συντεταγμένη του M_x ως προς τον Ox και y είναι η συντεταγμένη του M_y ως προς τον Oy, τότε $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Συνεπώς x και y είναι οι συντεταγμένες του M ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

Πρόταση 5.2.3. *Αν $M = (x_M, y_M)$ και $N = (x_N, y_N)$ ως προς το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε*

$$\overrightarrow{MN} = \{x_N - x_M, y_N - y_M\}.$$

Ορισμός 5.2.4. Αν $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ και $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, τότε το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ καλείται *ορθοκανονικό.*

Πρόταση 5.2.5. *Αν $M = (x_M, y_M)$ και $N = (x_N, y_N)$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε*

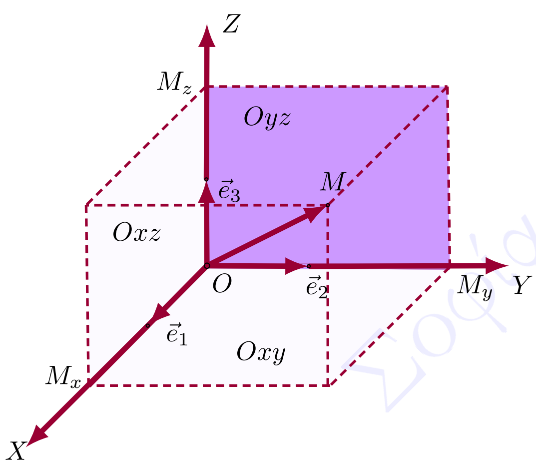
$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}.$$

Στον χώρο.

Η τετράδα $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, όπου O ένα σημείο του χώρου και $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ μη συνεπίπεδα διανύσματα, καλείται γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου και συμβολίζεται και με $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Επειδή $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου όλων των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου, για κάθε σημείο M του E^3 υπάρχουν αριθμοί x_M, y_M, z_M, τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{e}_1 + y_M\vec{e}_2 + z_M\vec{e}_3.$$



$$M_x = (x_M, 0, 0)$$
$$M_y = (0, y_M, 0)$$
$$M_z = (0, 0, z_M)$$

Οι αριθμοί x_M, y_M, z_M καλούνται συντεταγμένες (τετμημένη, τεταγμένη και κατηγμένη, αντίστοιχα) του M ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Γράφουμε $M = (x_M, y_M, z_M)$.

Υπάρχουν σημεία O_1, O_2, O_3 τέτοια ώστε $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OO_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OO_2}$ και $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OO_3}$. Οι άξονες συντεταγμένων $\{(OO_1), O\vec{e}_1\}$, $\{(OO_2), O\vec{e}_2\}$ και $\{(OO_3), O\vec{e}_3\}$ συμβολίζονται με Ox, Oy και Oz, αντίστοιχα. Τα επίπεδα των αξόνων Ox και Oy, Oy και Oz, Ox και Oz Συμβολίζονται με Oxy, Oyz, Oxz, αντίστοιχα.

Έστω M_x, M_y, M_z οι προβολές του M στους άξονες Ox, Oy, Oz, αντίστοιχα, παράλληλα στα επίπεδα Oyz, Oxz, Oxy, αντίστοιχα. Έστω x, y, z είναι οι συντεταγμένες των M_x, M_y, M_z, αντίστοιχα, στους άξονες Ox, Oy, Oz, αντίστοιχα. Τότε

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Συνεπώς x, y, z είναι οι συντεταγμένες του M ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Πρόταση 5.2.6. *Αν $M = (x_M, y_M, z_M)$ και $N = (x_N, y_N, z_N)$ ως προς το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε*

$$\overrightarrow{MN} = \{x_N - x_M, y_N - y_M, z_N - z_M\}.$$

Ορισμός 5.2.7. Αν $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$ και $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$, τότε το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ καλείται *ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου.*

Ορισμός 5.2.8. Θα λέμε ότι το σημείο M της ευθείας (AB), $M \neq B$, διαιρεί το εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ σε λόγο λ, αν $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

Πρόταση 5.2.9. *Αν $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ και $M = (x, y, z)$, $M \neq B$, διαιρεί το εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ σε λόγο λ, τότε*

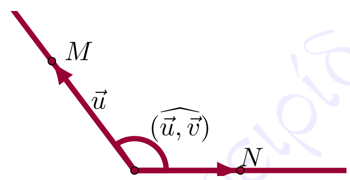
$$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \ y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} \ z = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$$

5.3 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Γωνία μεταξύ δύο ελέυθερων διανυσμάτων.

Εστω $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δύο μη μηδενικά ελέυθερα διανύσματα του χώρου. Εφαρμόζουμε τα διανύσματα αυτά σε ένα τυχαίο σημείο O του χώρου. Εστω $\overrightarrow{OM} \in \vec{u}$ και $\overrightarrow{ON} \in \vec{v}$. Η γωνία εκείνη μεταξύ των ημιευθειών $[OM)$ και $[ON)$, η οποία είναι $\leq \pi$ καλείται γωνία μεταξύ των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ και συμβολίζεται με $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Αν $\vec{u} = \vec{0}$ ή $\vec{v} = \vec{0}$,τότε θεωρούμε ότι η γωνία μεταξύ των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δεν ορίζεται.



Αλγεβρική τιμή διανύσματος.

Θεωρούμε ένα ελεύθερο διάνυσμα $\vec{v} \neq \vec{0}$. Το διάνυσμα $\vec{v}_0 = \dfrac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ έχει μήκος 1 και $\vec{v}_0 \upuparrows \vec{v}$.

Αν $\vec{u} \parallel \vec{v}$, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός λ για τον οποίον $\vec{u} = \lambda \vec{v}_0$. Ο λ καλείται την αλγεβρική τιμή του $\vec{u}$ πάνω στο $\vec{v}$ και συμβολίζεται με $\alpha\tau_{\vec{v}}(\vec{u})$. Προφανώς

$$\vec{u} \upuparrows \vec{v} \Longrightarrow \alpha\tau_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|$$

$$\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v} \Longrightarrow \alpha\tau_{\vec{v}}(\vec{u}) = -|\vec{u}|$$

Πρόταση 5.3.1. *Αν $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}_1 \parallel \vec{v}$, $\vec{u}_2 \parallel \vec{v}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε*

1. $\alpha\tau_{\vec{v}}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \alpha\tau_{\vec{v}}(\vec{u}_1) + \alpha\tau_{\vec{v}}(\vec{u}_2)$
2. $\alpha\tau_{\vec{v}}(\lambda\vec{u}) = \lambda\alpha\tau_{\vec{v}}(\vec{u})$

Προβολή ενός διανύσματος πάνω στο άλλο.

Θεωρούμε ένα ελεύθερο διάνυσμα $\vec{v} \neq \vec{0}$. Έστω O ένα σημείο του χώρου και $\overrightarrow{ON} \in \vec{v}$.

Για κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\vec{u}$ συμβολίζουμε με $\pi\rho_{\vec{v}}\vec{u}$ την ορθογώνια προβολή του $\vec{u}$ στην ευθεία (ON).

Πρόταση 5.3.2. *Αν $\vec{v} \neq \vec{0}$ και $\vec{u}$ ένα ελεύθερο διάνυσμα, τότε:*

1. $\vec{u} = \vec{0} \Longrightarrow \pi\rho_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{0}$ *και* $\alpha\tau_{\vec{v}}(\pi\rho_{\vec{v}}\vec{u}) = 0$.
2. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Longrightarrow \pi\rho_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{u}$.
3. $\vec{u} \nparallel \vec{v} \Longrightarrow \pi\rho_{\vec{v}}\vec{u} = \left(|\vec{u}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\right) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.
4. $\alpha\tau_{\vec{v}}(\pi\rho_{\vec{v}}\vec{u}) = |\vec{u}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, *όταν* $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Πρόταση 5.3.3. *Αν $\vec{v} \neq \vec{0}$, τότε για οποιαδήποτε ελεύθερα διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$:*

1. $\pi\rho_{\vec{v}}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \pi\rho_{\vec{v}}\vec{u}_1 + \pi\rho_{\vec{v}}\vec{u}_2$
2. $\pi\rho_{\vec{v}}(\lambda\vec{u}_1) = \lambda\pi\rho_{\vec{v}}(\vec{u}_1)$

Ορισμός του εσωτερικού γινομένου.

Εσωτερικό γινόμενο δύο ελεύθερων διανυσμάτων $\vec{u} \neq \vec{0}$ και $\vec{v} \neq \vec{0}$ είναι ο αριθμός $(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. Αν $\vec{u} = \vec{0}$ ή $\vec{v} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $(\vec{u},\vec{v}) = 0$. Το εσωτερικό γινόμενο θα το συμβολίζουμε και με $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Απο τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου προκύπτει ότι, αν $\vec{u} \neq 0$ και $\vec{v} \neq 0$, τότε

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$
3. $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
4. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$ ή $\vec{u} = \vec{0}$ ή $\vec{v} = \vec{0}$
5. $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot \alpha\tau_{\vec{u}}\,(\pi\rho_{\vec{u}}\vec{v})$, αν $\vec{u} \neq 0$
6. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\pi\rho_{\vec{u}}\vec{v}$, αν $\vec{u} \neq 0$
7. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$
8. $-|\vec{u}||\vec{v}| \leq (\vec{u},\vec{v}) \leq |\vec{u}||\vec{v}|$

Απόδειξη. Οι ιδιότητες 1–4 προκύπτουν από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου.

5. Συνεπάγεται από την Πρόταση 5.3.2(4).

6. Από την Πρόταση 5.3.2(3), $\pi\rho_{\vec{u}}\vec{v} = \left(|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right)\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Επομένως,

$$\vec{u}\cdot\pi\rho_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{u}|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \vec{u}^2\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \vec{u}\cdot\vec{v}.$$

7. Από την Πρόταση 5.3.1 και την ιδιότητα 5 του εσωτερικού γινομένου:

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} &= |\vec{w}|\alpha\tau(\pi\rho_{\vec{w}}(\vec{u}+\vec{v})) = |\vec{w}|\alpha\tau(\pi\rho_{\vec{w}}\vec{u} + \pi\rho_{\vec{w}}\vec{v})\\ &= |\vec{w}|(\alpha\tau(\pi\rho_{\vec{w}}\vec{u}) + \alpha\tau(\pi\rho_{\vec{w}}\vec{v})) = |\vec{w}|\cdot\alpha\tau(\pi\rho_{\vec{w}}\vec{u}) + |w|\cdot\alpha\tau(\pi\rho_{\vec{w}}\vec{v}))\\ &= \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}\end{aligned}$$

8. Αν $\vec{u} = 0$ ή $\vec{v} = 0$, τότε η ιδιότητα είναι προφανής. Αν $\vec{u} \neq 0$ και $\vec{v} \neq 0$, τότε παίρνουμε διαδοχικά:

$$-1 \leq \cos(\vec{u},\vec{v}) \leq 1 \Longrightarrow -|\vec{u}||\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) \leq |\vec{u}||\vec{v}| \Longrightarrow -|\vec{u}||\vec{v}| \leq \vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}|.$$

□

Θεώρημα 5.3.4. *Έστω $\vec{u} = \{u_1,u_2,u_3\}$ και $\vec{v} = \{v_1,v_2,v_3\}$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε*

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3$
2. $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$

Απόδειξη. Επειδή το σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ είναι ορθοκανονικό, έπεται ότι $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$ και $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$.

Άρα, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$ και $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$.

Συνεπώς:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3)(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$
2. $|\vec{u}| = \sqrt{|\vec{u}|^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\{u_1, u_2, u_3\} \cdot \{u_1, u_2, u_3\}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

□

Πρόταση 5.3.5. *Αν $M = (x_M, y_M, z_M)$ και $N = (x_N, y_N, z_N)$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε*

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2} \tag{5.1}$$

Απόδειξη. Επειδή $\overrightarrow{MN} = \{x_N - x_M, y_N - y_M, z_N - z_M\}$, ο τύπος 5.1 προκύπτει από το Θεώρημα 5.3.4(2). □

5.4 Πολικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

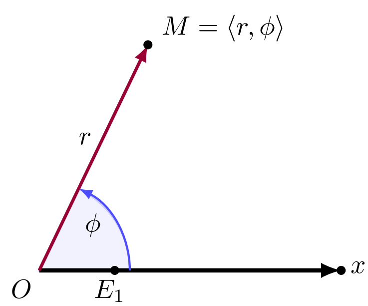
Το πολικό σύστημα συντεταγμένων μας προσφέρει έναν ακόμα τρόπο να προσδιορίζουμε τη θέση των σημείων στο επίπεδο με την βοήθεια αριθμών.

Για να οριστεί ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων αρκεί να δοθούν:

1. μια ημιευθεία Ox η οποία καλείται πολικός άξονας και η αρχή της O καλείται αρχή του πολικού συστήματος,
2. μια μονάδα μήκους (έστω $E_1 \in Ox$ και $|OE_1| = 1$)
3. μια θετική φορά περιστροφής (συνήθως η αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού).

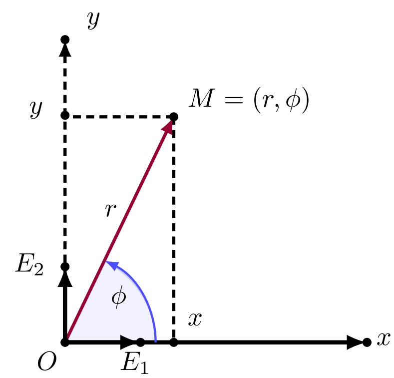
Έστω M ένα σημείο του επιπέδου. Στο M αντιστοιχούμε δύο αριθμούς $r = |\overrightarrow{OM}|$ και ϕ που είναι η γωνία εκ του $\overrightarrow{OE_1}$ προς το $\overrightarrow{OM}$, $0 \le \phi < 2\pi$. Οι αριθμοί αυτοί καλούνται πολικές συντεταγμένες του M, πολική ακτίνα και πολική γωνία, αντίστοιχα. Γράφουμε $M = \langle r, \phi \rangle$.

Για την πολική αρχή O η πολική ακτίνα ισούται με μηδέν ενώ η πολική γωνία είναι απροσδιόριστη.



Σε πολικό σύστημα $Or\phi$ συντεταγμένων αντιστοιχούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, όπου

1. $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, όπου $E_1 = \langle 1, 0 \rangle$ στο $Or\phi$,
2. $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$, όπου $E_2 = \langle 1, \frac{\pi}{2} \rangle$ στο $Or\phi$.



Αν $M = \langle r, \phi\rangle$ στο $Or\phi$ και $M = (x, y)$ στο Oxy, τότε

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned}$$

και

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ \cos\phi_M = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \phi\in[0, 2\pi).$$

5.5 Πολικό σύστημα συντεταγμένων στο χώρο.

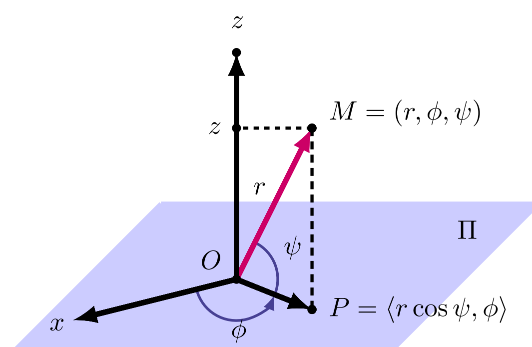
Για να οριστεί ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων στο χώρο αρκεί να δοθούν:

(i) ένα επίπεδο Π με πολικό σύστημα συντεταγμένων $Or\phi$ (αρχή O, πολικός άξονας Ox, μονάδα μήκους και θετική φορά περιστοφής),

(ii) ένας άξονας συντεταγμένων Oz κάθετος στο Π.

Έστω M ένα σημείο του χώρου για το οποίο $\overrightarrow{OM} \nparallel Oz$ και P η ορθογώνια προβολή του M στο Π. Συμβολίζουμε με ω την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{OP}$.

Σφαιρικές συντεταγμένες.



Οι σφαιρικές (ή πολικές) συντεταγμένες του M είναι η τριάδα αριθμών (r, ϕ, ψ), όπου

$r = |\overrightarrow{OM}|$, που καλείται πολική ακτίνα του M,

ϕ είναι η πολική γωνία του P, που καλείται μήκος του M,

$$\psi = \begin{cases} \omega, & \text{αν } \overrightarrow{PM} \uparrow\uparrow Oz \\ -\omega, & \text{αν } \overrightarrow{PM} \uparrow\downarrow Oz \\ 0, & \text{αν } M = P \in \Pi \end{cases}, \text{ που καλείται πλάτος του } M.$$

Οι σφαιρικές συντεταγμένες δεν ορίζονται για τα σημεία του άξονα Oz.

Σε κάθε πολικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου $Or\phi\psi$ μπορούμε να αντιστοιχήσουμε ένα ορθοκνονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ως εξής:

η αρχη O συμπίπτει με την αρχή του πολικού συστήματος,

$\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, όπου $E_1 \in \Pi$ και $E_1 = (1, 0)$ στο $Or\phi$,
$\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$, όπου $E_2 \in \Pi$ και $E_2 = (1, \frac{\Pi}{2})$ στο $Or\phi$,
$\vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$, όπου $E_3 \in Oz$ και $|\overrightarrow{OE_3}| = 1$.

Γνωρίζοντας τις σφαιρικές συντεταγμένες (r, ϕ, ψ) ενός σημείου M, μπορούμε να βρούμε τις καρτεσιανές του συντεταγμένες (x, y, z) από τις σχέσεις (παρατηρούμε ότι $P = \langle r\cos\psi, \phi\rangle$ στο $Or\phi$ του π.)

$$\begin{aligned} x &= r\cos\psi\cos\phi \\ y &= r\cos\psi\sin\phi \\ z &= r\sin\psi \end{aligned}$$

και αντίστροφα από τις σχέσεις

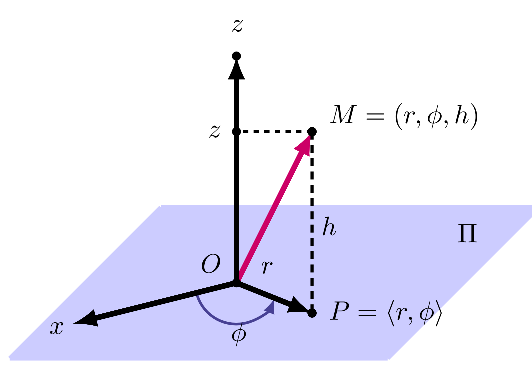
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \phi \in [0, 2\pi) \\ \sin\psi &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες.

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες του M είναι η τριάδα αριθμών (r, ϕ, h), όπου

$\langle r, \phi\rangle$ είναι οι πολικές συντεταγμένες της προβολής P ως προς το πολικό σύστημα $Or\phi$ του π.

$$h = \begin{cases} |\overrightarrow{PM}|, & \text{αν } \overrightarrow{PM} \uparrow\uparrow Oz, \\ -|\overrightarrow{PM}|, & \text{αν } \overrightarrow{PM} \uparrow\downarrow Oz. \end{cases}$$



Οι κυλινδρικές συντεταγμένες δεν ορίζονται για τα σημεία του άξονα Oz.

Γνωρίζοντας τις κυλινδρικές συντεταγμένες (r, ϕ, h) ενός σημείου μπορούμε να βρούμε τις καρτεσιανές του συντεταγμένες (x, y, z) από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= h \end{aligned}$$

και αντίστροφα από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \phi \in [0, 2\pi) \\ h &= z \end{aligned}$$

Παραδείγματα 5.5.1.

1. Έστω $A = \langle 8, \frac{2\pi}{3} \rangle$ και $B = \langle 6, \frac{\pi}{3} \rangle$. Θα βρούμε τις πολικές συντεταγμένες του μέσου $M = (x_M, y_M)$ και το $|AB|$.

$$\begin{aligned} x_A &= r_A\cos\phi_A = 8\cos\frac{2\pi}{3} = -4 \\ y_A &= r_A\sin\phi_A = 8\sin\frac{2\pi}{3} = 4\sqrt{3} \\ x_B &= r_B\cos\phi_B = 6\cos\frac{\pi}{3} = 3 \\ y_B &= r_B\sin\phi_B = 6\sin\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3} \\ x_M &= \frac{x_A+x_B}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_M &= \frac{y_A+y_B}{2} = -\frac{7\sqrt{3}}{2} \\ |AB| &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = 2 \\ r_M &= \sqrt{x_M^2+y_M^2} = \frac{\sqrt{148}}{2} \\ \sin\phi_M &= \frac{y_M}{r_M} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{148}},\ \cos\phi_M = \frac{x_M}{r_M} = -\frac{1}{\sqrt{148}} \end{aligned}$$

2. Ο ορθός κύλινδρος που έχει ως οδηγό τον κύκλο $x^2+y^2=3$ του Oxy-επιπέδου έχει καρτεσιανή εξίσωση $x^2+y^2=3$ και κυλινδρική εξίσωση $r=\sqrt{3}$.

3. Η σφαίρα $x^2+y^2+z^2=25$ σε σφαιρικές συντεταγμένες έχει εξίσωση $r=5$.

4. Έστω $Oxyz$ ένα ορθοκανινικό σύστημα συντεταγμένων. Θα βρούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου $A = (x_A, y_A, z_A)$, αν $z_A = -1$ και οι γωνίες μεταξύ του $\overrightarrow{OA}$ και των $\vec{e}_1$ και $\vec{e}_2$ είναι $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{\pi}{3}$, αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} x_A &= \overrightarrow{OA}\cdot\vec{e}_1 = r_A\cos\frac{\pi}{4} = \frac{r_A\sqrt{2}}{2} \\ y_A &= \overrightarrow{OA}\cdot\vec{e}_2 = r_A\cos\frac{\pi}{3} = \frac{r_A}{2} \\ r_A^2 &= x_A^2+y_A^2+z_A^2 = \frac{r_A^2}{2} + \frac{r_A^2}{4} + 1 \Rightarrow r_A = 2 \\ x_A &= \sqrt{2},\ y_A = 1,\ z_A = -1 \\ \sin\phi_A &= \frac{y_A}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\phi_A = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \sin\psi_A &= \frac{z_A}{r_A} = -\frac{1}{2},\ \psi_A \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \psi_A = -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

5.6 Ασκήσεις.

5.6.1. Έστω $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλεπιπέδου με ακμές OA, OB, OC ως προς το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

5.6.2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων τομής των διαμέσων των εδρών του τετραέδρου $OABC$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, όπου $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$.

5.6.3. Έστω $\overrightarrow{OA} = \{-3, 0, 4\}$ και $\overrightarrow{OB} = \{5, -2, 14\}$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Να βρεθουν οι συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ παράλληλου στη διχοτόμο της AOB ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

5.6.4. Έστω $M = (x_M, y_M, z_M)$, $x_M \neq 0$, $y_M \neq 0$, $z_M \neq 0$, ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των ορθογώνιων προβολών του M στα επίπεδα συντεταγμάνων Oxy, Oyz, Oxz και στους άξονες συντεταγμένων Ox, Oy, Oz.

Λύση. Έστω M_x, M_y, M_z είναι οι ορθογώνιες προβολές του M στους άξονες Ox, Oy, Oz, αντίστοιχα.
$M_x \in Ox \Longrightarrow M_x = (x, 0, 0)$ και $\overrightarrow{MM_x} = \{x - x_M, -y_M, -z_M\}$.
$\overrightarrow{MM_x} \perp \vec{e}_1 \Longrightarrow \overrightarrow{MM_x} \cdot \vec{e}_1 = 0 \Longrightarrow \{x - x_M, -y_M, -z_M\} \cdot \{1, 0, 0\} = 0 \Longrightarrow$
$x - x_M = 0 \Longrightarrow x = x_M \Longrightarrow M_x = (x_M, 0, 0)$.
Όμοια αποδεικνύεται ότι $M_y = (0, y_M, 0)$ και $M_z = (0, 0, z_M)$.

Έστω M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} είναι οι ορθογώνιες προβολές του M στα επίπεδα Oxy, Oyz, Oxz, αντίστοιχα.
$M_{xy} \in Oxy \Longrightarrow M_{xy} = (x, y, 0)$ και $\overrightarrow{MM_{xy}} = \{x - x_M, y - y_M, -z_M\}$.
$\overrightarrow{MM_{xy}} \perp \vec{e}_1$ και $\overrightarrow{MM_{xy}} \perp \vec{e}_2 \Longrightarrow \overrightarrow{MM_{xy}} \cdot \vec{e}_1 = 0$ και $\overrightarrow{MM_{xy}} \cdot \vec{e}_2 = 0 \Longrightarrow$
$\{x - x_M, y - y_M, -z_M\} \cdot \{1, 0, 0\} = 0 = \{x - x_M, y - y_M, -z_M\} \cdot \{0, 1, 0\} \Longrightarrow$
$x - x_M = 0$ και $y - y_M = 0 \Longrightarrow x = x_M$ και $y = y_M \Longrightarrow M_{xy} = (x_M, y_M, 0)$.
Όμοια αποδεικνύεται ότι $M_{yz} = (0, y_M, z_M)$ και $M_{xz} = (x_M, 0, z_M)$.

5.6.5. Έστω $M = (x_M, y_M, z_M)$, $x_M \neq 0$, $y_M \neq 0$, $z_M \neq 0$, ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου συμμετρικού του M ως προς:

(i) την αρχή του συστήματος,

(ii) το επίπεδο Oxy (Oyz, Oxz),

(iii) τον άξονα Ox (Oy, Oz)

5.6.6. Έστω $M = (x_M, y_M, z_M)$, $x_M \neq 0$, $y_M \neq 0$, $z_M \neq 0$, ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Να βρεθούν οι αποστάσεις του M από τους άξονες συντεταγμένων.

Λύση. Έστω M_x, M_y, M_z οι ορθογώνιες προβολές του M στους άξονες Ox, Oy, Oz, αντίστοιχα, τότε $M_x = (x_M, 0, 0)$, $M_y = (0, y_M, 0)$, $M_z = (0, 0, z_M) \Longrightarrow$ οι αποστάσεις από τους άξονες Ox, Oy, Oz είναι αντίστοιχα

$$|\overrightarrow{MM_x}| = \sqrt{y_M^2 + z_M^2},\ |\overrightarrow{MM_y}| = \sqrt{x_M^2 + z_M^2},\ |\overrightarrow{MM_z}| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$$

5.6.7. Έστω $Oxyz$ ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Να βρεθεί το σημείο M με θετικές συντεταγμένες, του οποίου οι αποστάσεις από τους άξονες
Ox, Oy, Oz είναι 5, $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{13}$, αντίστοιχα.

5.6.8. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμείου P ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, αν είναι γνωστό ότι το $|OP| = \rho$ και η γωνία μεταξύ των διανυσνάτων $\overrightarrow{OP}$ και $\vec{e}_i$ είναι ϕ_i, $i = 1, 2, 3$.

Λύση. Έστω $P = (x_P, y_P, z_P)$, τότε $\overrightarrow{OP} = \{x_P, y_P, z_P\}$.
$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_1 = \{x_P, y_P, z_P\} \cdot \{1, 0, 0\} = x_P$ και
$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_1 = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\vec{e}_1| \cos\phi_1 = \rho \cdot \cos\phi_1 \Longrightarrow x_P = \rho \cdot \cos\phi_1$.
Όμοια, $y_P = \rho \cdot \cos\phi_2$ και $z_P = \rho \cdot \cos\phi_3$.

5.6.9. Έστω $A=(1,2,3)$ και $B=(7,2,5)$ ως προς ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων. Στην ευθεία (AB) να βρεθεί το σημείο M, τέτοιο ώστε το A να βρίσκεται μεταξύ των M και B και το μήκος του τμήματος AM να είναι διπλάσιο από το μήκος του τμήματος AB.

5.6.10. Να αποδειχθεί ότι τα τρία ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των απέναντι ακμών ενός τετραέδρου τέμνονται σε ένα σημείο, το οποίο είναι το μέσο αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων.

5.6.11. Να αποδειχθεί ότι αν στο τετράεδρο $ABCD$ οι δύο ακμές είναι κάθετες προς τις αντίστοιχες απέναντι ακμές, τότε και οι υπόλοιπες δύο ακμές έιναι κάθετες.

5.6.12. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα της σφαίρας που περιέχει τα σημεία
$A=(1,2,3)$, $B=(5,2,3)$, $C=(2,5,3)$ και $D=(1,2,-1)$.

5.6.13. Μια ευθεία ε σχηματίζει ίσες γωνίες με τις ακμές μιας ορθής τρίεδρης γωνίας. Να βρεθούν οι γωνίες αυτές.

Λύση. Έστω O η κορυφή της τριεδρης γωνίας. Διαλέγουμε σε κάθε ακμή από ένα σημείο: A,B,C έτσι ώστε $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$. Παίρνουμε ένα σημείο $M\in\varepsilon$, τότε $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

Άρα, $\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$, $\overrightarrow{OA}=\{1,0,0\}$, $\overrightarrow{OB}=\{0,1,0\}$, $\overrightarrow{OC}=\{0,0,1\}$ ως προς το οριοκανονικό σύστημα $\{O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$. Έστω $\varphi_A,\varphi_B,\varphi_C$ οι γωνίες μεταξύ του $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$, αντίστοιχα. Έχουμε

$$\cos\varphi_A=\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{OA}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\cos\varphi_B=\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\cos\varphi_C=\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Επειδή $\varphi_A=\varphi_B=\varphi_C$, έπειται ότι $\cos\varphi_A=\cos\varphi_B=\cos\varphi_C$ και συνεπώς $x=y=z$.

Οπότε $\cos\varphi_A=\frac{x}{\sqrt{3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, από όπου $\varphi_A=\varphi_B=\varphi_C=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.6.14. Να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων M_1 και M_2 ως προς ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ώστε η ευθεία (M_1M_2) να τέμνει και τα τρία επίπεδα συντεταγμένων χωρίς να περιέχεται σε κανένα από αυτά. Να βρεθεί ο λόγος στον οποίο το σημείο τομής της (M_1M_2) με το Oxy-επίπεδο διαιρεί το διάνυσμα $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Κεφάλαιο 6

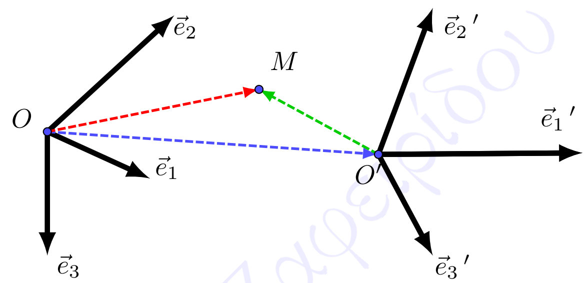
Μετασχηματισμοι συστημάτων συντεταγμένων.

6.1 Μετασχηματισμός γενικού συστήματος συντεταγμένων

Έστω $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ και $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ δύο γενικά συστήματα συντεταγμένων του χώρου.

Ανακύπτει το εξής πρόβλημα:

Γνωρίζοντας τις συντεταγμένες (x', y', z') ενός συμείου M του χώρου ως προς το «νέο σύστημα» $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$, να βρούμε τις συντεταγμένες (x, y, z) του M ως προς «παλιό σύστημα» $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.



Το καθένα από τα διανύσματα του $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1{}' &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3\\ \vec{e}_2{}' &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3\\ \vec{e}_3{}' &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3\end{aligned} \tag{6.1}$$

Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

καλείται *πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *προς τη βάση* $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$ *όπως και πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από το σύστημα* $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ *προς το σύστημα* $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$.

Οι ισότητες (6.1) με την βοήθεια των πινάκων μπορούν να γραφούν σε μία:

$$(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot A$$

Θεώρημα 6.1.1. *Αν A είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'\}$ και ο B είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}''\vec{e}_2{}''\vec{e}_3{}''\}$, τότε $A \cdot B$ είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}''\vec{e}_2{}''\vec{e}_3{}''\}$.*

Απόδειξη.

$$(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot A$$

$$(\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}'', \vec{e}_3{}'') = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}') \cdot B = ((\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot A) \cdot B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot (A \cdot B)$$

□

Θεώρημα 6.1.2. *Αν A είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'\}$, τότε ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι ο A^{-1}.*

Απόδειξη. Έστω A' ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Τότε ο πίνακας μετάβασης από τη $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ προς τη $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι από την μία ο $A \cdot A'$ και από την άλλη ο $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, δηλαδή $A \cdot A' = I$. Άρα, $A' = A^{-1}$. □

Θεώρημα 6.1.3. *Ένας πίνακας A είναι πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από ένα σύστημα συντεταγμένων προς ένα άλλο αν και μόνο αν $|A| \neq 0$.*

Απόδειξη. Αν ο A είναι ο πίνακας μετάβασης από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$, τότε οι στήλες του A είναι οι συντεταγμένες των $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Επειδή τα διανύσματα $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα $|A| \neq 0$.

Αντίστροφα, αν $|A| \neq 0$, τότε θεωρούμε ένα τυχαίο σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ και τρία διανύσματα $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ τέτοι ώστε $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot A$. Τότε οι στήλες του A είναι οι συντεταγμένες των $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Επειδή $|A| \neq 0$, τα $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και ο A είναι ο πίνακας μετάβασης από το από το $O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ προς το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$. □

Θεώρημα 6.1.4. *Έστω ένα διάνυσμα $\vec{u}$ έχει συντεταγμένες $\{u_1, u_2, u_3\}$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ και $\{u_1', u_2', u_3'\}$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$.*

Αν ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ προς τη $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}u_1' + a_{12}u_2' + a_{13}u_3' \\ u_2 &= a_{21}u_1' + a_{22}u_2' + a_{23}u_3' \\ u_3 &= a_{31}u_1' + a_{32}u_2' + a_{33}u_3' \end{aligned} \tag{6.2}$$

Απόδειξη. Έχουμε $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$ και $\vec{u} = u_1'\vec{e}_1{}' + u_2'\vec{e}_2{}' + u_3'\vec{e}_3{}'$.

Άρα, $u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 = u_1'\vec{e}_1{}' + u_2'\vec{e}_2{}' + u_3'\vec{e}_3{}'$.

Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα τα $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ από τις σχέσεις (6.1) παίρνουμε

$$u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 = (a_{11}u_1' + a_{12}u_2' + a_{13}u_3')\vec{e}_1 + (a_{21}u_1' + a_{22}u_2' + a_{23}u_3')\vec{e}_2 + (a_{31}u_1' + a_{32}u_2' + a_{33}u_3')\vec{e}_3.$$

Εξίσώνοντας στην τελευταία ισότητα τους συντελεστές των $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ παίρνουμε τις σχέσεις (6.2). □

6.2 Τύποι αλλαγής των συντεταγμένων.

Θεώρημα 6.2.1. *Έστω ένα σημείο M έχει συντεταγμένες (x, y, z) ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ και (x', y', z') ως προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$.*

Αν $O' = (x_0, y_0, z_0)$ ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ και ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + x_0 \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + y_0 \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + z_0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \\ \overrightarrow{OO'} &= x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3 \\ \overrightarrow{O'M} &= x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}' + z'\vec{e}_3{}' \end{aligned} \tag{6.4}$$

Η διανυσματική ισότητα $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ γράφεται

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3) + (x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}' + z'\vec{e}_3{}') \tag{6.5}$$

Αντικαθιστώντας τα $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ από τις (6.1) στην (6.5) παίρνουμε
$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3) + x'(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) + y'(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + z'(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) = (x'a_{11} + y'a_{12} + z'a_{13} + x_0)\vec{e}_1 + (x'a_{21} + y'a_{22} + z'a_{23} + y_0)\vec{e}_2 + (x'a_{31} + y'a_{32} + z'a_{33} + z_0)\vec{e}_3$

Εξισώνοντας τους συντέλεστες των $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ παίρνουμε τους τύπους (6.3). □

Ορισμός 6.2.2. Οι ισότητες (6.3) καλούνται *τύποι αλλαγής (ή τύποι μετασχηματισμού) των συντεταγμένων από το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ προς το σύστημα $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$.*

Με τη βοήθεια των πινάκων οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων (6.3) γράφονται

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Πόρισμα 6.2.3. *Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ προς το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ (σταθερή αρχή) είναι*

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', \end{aligned} \tag{6.6}$$

όπου $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *είναι πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ προς το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$.*

Πόρισμα 6.2.4. *Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ προς το $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ (σταθερά διανύσματα της βάσης) είναι*

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0 \\ z &= z' + z_0, \end{aligned} \tag{6.7}$$

όπου $O' = (x_0, y_0, z_0)$ ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

6.3 Τύποι αλλαγής των συντεταγμένων στο επίπεδο

Έστω $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ και $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ δύο γενικά συστήματα συντεταγμένων ενός επιπέδου.

Το καθένα από τα διανύσματα του $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ καλείται *πίνακας μετάβασης (ή πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων) από τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\}$ όπως και πίνακας μετάβασης από το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το σύστημα $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$.*

Οι ισότητες (6.8) με την βοήθεια των πινάκων μπορούν να γραφούν σε μία:

$$(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot A$$

Θεώρημα 6.3.1. *Αν A είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\}$ και ο B είναι ο πίνακας μετάβαης από τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}''\vec{e}_2{}''\}$, τότε $A \cdot B$ είναι ο πίνακας μετάβαης από τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}'', \vec{e}_2{}''\}$.*

Θεώρημα 6.3.2. *Αν A είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\}$, τότε ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ είναι ο A^{-1}.*

Θεώρημα 6.3.3. *Έστω ένα διάνυσμα $\vec{u}$ έχει συντεταγμένες $\{u_1, u_2\}$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ και $\{u_1', u_2'\}$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$.*

Αν ο πίνακας μετάβασης από τη $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ προς τη $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$ είναι ο $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, τότε

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}u_1' + a_{12}u_2' \\ u_2 &= a_{21}u_1' + a_{22}u_2' \end{aligned} \tag{6.9}$$

Θεώρημα 6.3.4. *Έστω ένα σημείο M έχει συντεταγμένες (x, y) ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ και (x', y') ως προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$. Αν $O' = (x_0, y_0)$ ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ και ο πίνακας μετάβασης από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι ο*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Ορισμός 6.3.5. Οι ισότητες (6.10) καλούνται *τύποι αλλαγής (ή τύποι μετασχηματισμού) των συντεταγμένων από το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$*. Με την βοήθεια των πινάκων οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων (6.10) γράφονται

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Πόρισμα 6.3.6. *Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων από το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ (σταθερή αρχή) είναι*

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y', \end{aligned} \tag{6.11}$$

όπου $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ είναι πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$.

Πόρισμα 6.3.7. *Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων από το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O'\vec{e}_1\vec{e}_2$ (σταθερά διανύσματα της βάσης) είναι*

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0, \end{aligned} \tag{6.12}$$

όπου $O' = (x_0, y_0)$ ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

6.4 Αλλαγή ορθοκανονικού συστήματος.

Εστω $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ και $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ δύο ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων του επιπέδου και $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$. Τότε

$$\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' &= c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Εχουμε

$$\begin{aligned} |\vec{e}_1{}'| = 1 &\implies c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1 \\ |\vec{e}_2{}'| = 1 &\implies c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1 \\ \vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_2{}' = 0 &\implies c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0 \end{aligned}$$

Ορισμός 6.4.1. Ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

καλείται *ορθογώνιος* όταν:
(1) $c_{1k}^2 + c_{2k}^2 + \ldots + c_{nk}^2 = 1$ για κάθε $k = 1, ..., n$
(2) $c_{1k}c_{1j} + c_{2k}c_{2j} + \ldots + c_{nk}c_{nj} = 0$, αν $k \neq j$, $k, j = 1, ..., n$.

Θεώρημα 6.4.2. *Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *C είναι ορθογώνιος*
2. *$C^tC = I$*
3. *$C^t = C^{-1}$*
4. *C^t είναι ορθογώνιος*

Θεώρημα 6.4.3. *Η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα ισούται με ± 1.*

Απόδειξη. Επειδή ο πίνακας C είναι ορθογώνιος, έχουμε: $C^tC = I$. Οπότε διαδοχικά παίρνουμε:
$|C| = |C^t|$ και $C^tC = I \implies |C| = |C^t|$ και $|C||C^t| = 1 \implies |C|^2 = 1 \implies |C| = \pm 1$. □

Θεώρημα 6.4.4. *Το γινόμενο δύο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας και ο αντίστροφος ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ορθογώνιος πίνακας.*

Απόδειξη. $(CB)^t = B^t \cdot C^t = B^{-1} \cdot C^{-1} = (C \cdot B)^{-1} \implies C \cdot B$ είναι ορθογώνιος.
$(C^{-1})^t = (C^t)^{-1} = (C^{-1})^{-1} \implies C^{-1}$ είναι ορθογώνιος. □

Θεώρημα 6.4.5. *Ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ μετασχηματισμού των συντεταγμένων από ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς ένα σύστημα $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι ορθογώνιος αν και μόνον αν όταν το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι ορθοκανονικό.*

Απόδειξη. Επειδή ο C είναι πίνακας μετασχηματισμού των συντεταγμένων από το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το σύστημα $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' &= c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι ορθοκανονικό αν και μόνον αν $|\vec{e}_1{}'| = |\vec{e}_2{}'| = 1$ και $\vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_2{}' = 0$. Ισοδύναμα, $c_{11}^2 + c_{21}^2 = c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1$ και $c_{11} \cdot c_{12} + c_{21} \cdot c_{22} = 0$. Δηλαδή αν και μόνο αν ο C είναι ορθογώνιος. □

Θεώρημα 6.4.6. *Αν ο πίνακας* $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ *είναι ορθογώνιος, τότε έχει μία από τις μορφές:*

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \text{ όπου } \phi \in [0, 2\pi]$$

Απόδειξη. Αν C είναι ορθογώνιος, τότε

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1 \tag{6.13}$$

$$c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1 \tag{6.14}$$

$$c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0 \tag{6.15}$$

Από την (6.13) υπάρχει $\phi \in [0, 2\pi]$ τέτοιο ώστε $c_{11} = \cos\phi$, $c_{21} = \sin\phi$.
Η (6.15) γράφεται

$$c_{12}\cos\phi = -c_{22}\sin\phi \tag{6.16}$$

Υψώνοντας την (6.16) στο τετράγωνο παίρνουμε διαδοχικά:
$c_{12}^2\cos^2\phi = c_{22}^2\sin^2\phi \Longrightarrow$
$c_{12}^2\cos^2\phi + c_{12}^2\sin^2\phi = c_{22}^2\sin^2\phi + c_{12}^2\sin^2\phi \Longrightarrow$
$c_{12}^2 = (c_{22}^2 + c_{12}^2)\sin^2\phi$.
Από την (6.14) και την τελευταία ισότητα παίρνουμε: $c_{12}^2 = \sin^2\phi$. Συνεπώς

$$c_{12} = \sin\phi \text{ ή } c_{12} = -\sin\phi.$$

Τότε από την (6.16): $c_{22} = -\cos\phi$ ή $c_{22} = \cos\phi$, αντίστοιχα. □

Πόρισμα 6.4.7. *Αν C είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, τότε*

$$C = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \text{ ή } C = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}, \text{ όπου } \phi \in [0, 2\pi]$$

και, συνεπώς, $|C| = \pm 1$.

Σημείωση 6.4.8.

1. Αν ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς ένα σύστημα $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι ο $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, τότε

   $$\begin{array}{rcl} \vec{e}_1{}' & = & \cos\phi\vec{e}_1 + \sin\phi\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' & = & -\sin\phi\vec{e}_1 + \cos\phi\vec{e}_2 \end{array},$$

   δηλαδη το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ προκύπτει με περιστροφή του $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ γύρω από το O κατά την γωνία ϕ.

   Οι τύποι μετάσχηματισμού των συντεταγμένων στη περίπτωση αυτή είναι

   $$\begin{array}{ll} x & = x'\cos\phi - y'\sin\phi \\ y & = x'\sin\phi + y'\cos\phi \end{array}$$

2. Αν ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς ένα σύστημα $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι ο $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$, τότε

   $$\begin{array}{rcl} \vec{e}_1{}' & = & \cos\phi\vec{e}_1 + \sin\phi\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' & = & -(-\sin\phi\vec{e}_1 + \cos\phi\vec{e}_2) \end{array}$$

   δηλαδή το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ προκύπτει με περιστροφή του $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ γύρω από το O κατά την γωνία ϕ και μετέπειτα ανάκλαση του δεύτερου διανύσματος του συστήματος από το πρώτο.

   Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων στη περίπτωση αυτή είναι

   $$\begin{array}{ll} x & = x'\cos\phi + y'\sin\phi \\ y & = x'\sin\phi - y'\cos\phi \end{array}$$

Παραδείγματα 6.4.9.

1. Έστω η έλλειψη Γ έχει εξίσωση
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \tag{6.17}$$
στο σύτημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Θα βρούμε την εξίσωση της Γ στο σύστημα $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ που προκύπτει με την περιστροφή του $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ γύρω από το O κατά την γωνία $\phi = \frac{\pi}{4}$.
Ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων είναι
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων είναι
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$
Άρα, η εξίσωση της Γ στο σύστημα $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ είναι
$$\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y')^2}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 = 1$$
μετά από πράξεις παίρνουμε
$$\frac{5}{8}x'^2 + \frac{3}{4}x'y' + \frac{5}{8}y'^2 = 1.$$

2. Έστω η έλλειψη Γ έχει εξίσωση
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$
στο σύτημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Θα βρούμε την εξίσωση της Γ στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2$, όπου $O' = (1, 2)$ στο $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.
Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων είναι
$$x = x' + 1$$
$$y = y' + 2$$
Άρα, η εξίσωση της Γ στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2$ είναι
$$\frac{(x'+1)^2}{4} + (y'+2)^2 - 1 = 0$$
μετά από πράξεις παίρνουμε
$$\frac{x'^2}{4} + y'^2 + \frac{1}{2}x' + 4y' + \frac{13}{4} = 0$$

3. Θα βρούμε την εξίσωση της Γ στο σύστημα $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ που προκύπτει με την περιστροφή του $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ γύρω από το O κατά την γωνία $\phi = \frac{\pi}{4}$ και την μεταφορά της αρχής O στο $O' = (1, 2)$. Οι τύποι μετασχηματισμού των συντεταγμένων είναι
$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 1 \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 2 \end{aligned} \tag{6.18}$$
Αντικαθιστώντας τα x και y στην (6.17) από τους (6.18) παίρνουμε την εξίσωση της έλειψης στο $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$:
$$\frac{5}{8}x'^2 + \frac{3}{4}x'y' + \frac{5}{8}y'^2 + \frac{9\sqrt{2}}{4}x' + \frac{7\sqrt{2}}{4}y' + \frac{13}{4} = 0.$$

6.5 Ασκήσεις

6.5.1. Να γραφούν οι τύποι μετασχηματισμού των συντεταγμένων από το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ αν: $O' = (0, -2, 1)$, $\vec{e}_1{}' = \{2, -1, 2\}$, $\vec{e}_2{}' = \{3, 0, 1\}$ και $\vec{e}_3{}' = \{2, 1, -1\}$ ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

6.5.2. Έστω ότι $O' = (0, -2, 1)$, $\vec{e}_1{}' = \{2, 1, -2\}$, $\vec{e}_2{}' = \{2, -1, 2\}$ και $\vec{e}_3{}' = \{3, 0, 1\}$ ως προς ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(β΄) Να γραφούν οι τύποι μετασχηματισμού των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$.

(γ΄) Να γραφούν οι τύποι μετασχηματισμού των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

6.5.3. Έστω ότι $O' = (0, -2, 1)$, $\vec{e}_1{}' = \{9, 2, 3\}$, $\vec{e}_2{}' = \{2, 1, 1\}$ και $\vec{e}_3{}' = \{-4, 0, -1\}$ ως προς ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσνατα $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ είναι μη συνεπίπεδα.
Αν $M = (1, 0 - 1)$ ως προς το σύστημα $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ να βρεθούν οι συντεταγμένες του M ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

6.5.4. Δίνονται οι τύποι μετασχηματισμού συντεταγμένων απο το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 5 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 1. \end{cases}.$$

Αν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{u}$ ως προς το σύστημα $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ είναι $\{-1, 2\}$, τότε να βρεθούν οι συντεταγμένες αυτού ως προς το σύστημα $O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$.

6.5.5. Οι συντεταγμένες (x, y, z) των σημείων ως προς το σύστημα $Oxyz$ εκφράζονται μέσω των συντεταγμένων (x', y', z') των σημείων ως προς το σύστημα $O'x'y'z'$ από τους τύπους:

$$\begin{aligned} x &= -2x' - y' - z' + 5 \\ y &= -x' - z' - 1 \\ z &= x' + 3y' + z' + 2 \end{aligned}$$

(α΄) Να εκφραστούν οι συντεταγμένες (x', y', z') μέσω των (x, y, z).

(β΄) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του O' ως προς $Oxyz$.

(γ΄) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ του $O'x'y'z'$.

6.5.6. Έστω ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $x + y - 7 = 0$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{i}\vec{j}$. Να βρεθεί ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O'\vec{i}'\vec{j}'$ ως προς το οποίο η ε έχει εξίσωση $x' = 0$.

6.5.7. Η σφαίρα S έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 9$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της S ως προς $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, όπου $O' = (2, -3, 5)$ στο $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

6.5.8. Οι τύποι μετασχηματισμού των συντεταγμένων από το γενικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο γενικό σύστημα $O\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$ είναι

$$\begin{aligned} x &= -2x' - y' - z' \\ y &= -x' + 3y' - z' \\ z &= x' + 3y' + z' \end{aligned}.$$

Το επίπεδο Π έχει εξίσωση $2x' + 3y' + 4z' - 9 = 0$ στο $O\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$. Να βρεθεί η εξίσωση του Π στο $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Κεφάλαιο 7

Εξωτερικό γινόμενο και μικτό γινόμενο διανυσμάτων

7.1 Προσανατολισμός του επιπέδου και του χώρου.

Για να προσανατολίσουμε μια ευθεία αρκεί να ορίσουμε μια κατεύθυνση κίνησης πάνω στην ευθεία. Μια ευθεία ε μαζί με ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}$ είναι προσανατολισμένη.

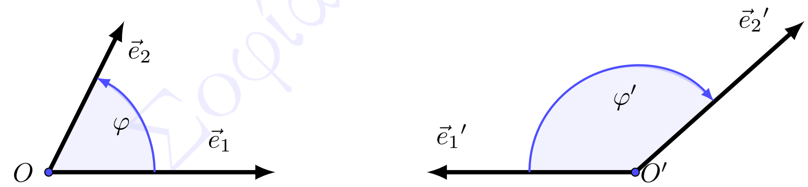
Προσανατολισμός του επιπέδου.

Ένα επίπεδο π είναι προσανατολισμένο αν πάνω σε αυτό έχει οριστεί μια θετική φορά περιστροφής (η φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού ή η αντίθετη φορά).

Προσανατολισμένο επίπεδο είναι ένα απίπεδο μαζί με ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Θετική φορά περιστροφής είναι εκείνη κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το $\vec{e}_1$ για να συμπέσει με το $\vec{e}_2$ έτσι ώστε η γωνία της περιστροφής ϕ να ικανοποιεί τη συνθήκη: $0 < \phi < \pi$.

Όταν ένα επίπεδο Π είναι προσανατολισμένο με ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε θετικώς προσανατολισμένα γενικά συστήματα συντεταγμένων του Π είναι όλα εκείνα τα γενικά συστήματα συντεταγμένων που έχουν τον ίδιο προσανατολισμό με το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, δηλαδή ορίζουν την ίδια φορά περιστροφής στο Π.

Στο σχήμα που ακολουθεί τα συστήματα έχουν διαφορετικό προσανατολισμό: το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ ορίζει την φορά περιστροφής με τους δείκτες του ρολογιού και το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ την αντίθετη.



Σε ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων ενός προσανατολισμένου επιπέδου η αντιμετάθεση δύο διανυσμάτων όπως και η αντικατάσταση ενός διανύσματος με το αντίθετο διάνυσμα οδηγεί σε γενικό σύστημα συντεταγμένων αντίθετου προσανατολισμού.

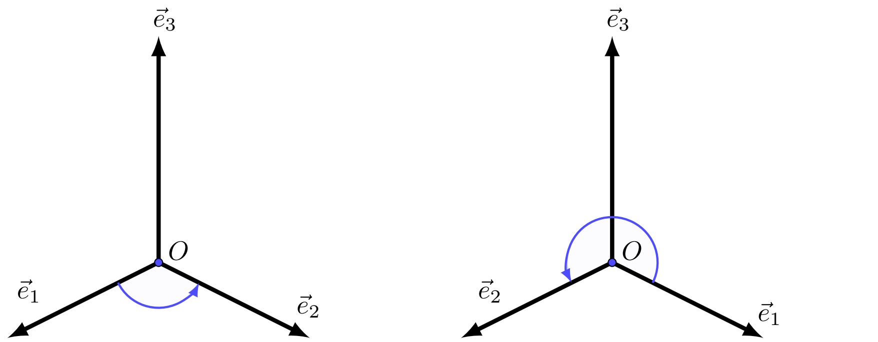
Επομένως

1. Το ίδιο προσανατολισμό με το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ έχουν τα συστήματα: $O\vec{e}_2 - \vec{e}_1$, $O - \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $O - \vec{e}_2\vec{e}_1$.

2. Αντίθετο προσανατολισμό από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ έχουν τα συστήματα: $O\vec{e}_2\vec{e}_1$, $O - \vec{e}_1\vec{e}_2$, $O\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

Προσανατολισμός του χώρου.

Ορισμός 7.1.1. Θα λέμε ότι ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ είναι δεξιόστροφο (αριστερόστροφο), αν παρατηρώντας από το πέρας του τρίτου διανύσματος $\vec{e}_3$ προς το επίπεδο Oxy, η γωνία ϕ κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το πρώτο διάνυσμα $\vec{e}_1$ γύρω από το O κατά την φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού για να συμπέσει με το δεύτερο διάνυσμα $\vec{e}_2$ ικανοποιεί την συνθήκη: $0 < \phi < \pi$ ($\pi < \phi < 2\phi$).



Δεξιόστροφο σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ Αριστερόστροφο σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

Το σύνολο όλων των γενικών συστημάτων συντεταγμένων του χώρου χωρίζεται σε δύο κλάσεις: η μία κλάση αποτελείται από όλα τα δεξιόστροφα γενικά συστήματα συντεταγμένων και η άλλη κλάση αποτελείται από όλα τα αριστερόστροφα γενικά συστήματα συντεταγμένων.

Ορισμός 7.1.2. Θα λέμε ότι ο χώρος είναι προσανατολισμένος, αν τα συστήματα συντεταγμένων της μιας οικογένειας (π.χ. τα δεξιόστροφα) δηλωθούν ως θετικώς προσανατολισμένα.

Για να προσανατολιστεί ο χώρος αρκεί ωα δοθεί ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Οπότε, θεωρώντας όλα τα συστήματα συντεταγμένων της κλάσης που περιέχει το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ως θετικώς προσανατολισμένα ορίζουμε προσανατολισμό του χώρου.

Σε ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου:

1. Η αντιμετάθεση δύο διανυσμάτων όπως και η αντικατάσταση ενός διανύσματος με το αντίθετο διάνυσμα οδηγεί σε γενικό σύστημα συντεταγμένων αντίθετου προσανατολισμού.

2. Η κυκλική αντιμετάθεση διανυσμάτων ενός γενικού συστήματος συντεταγμένων του χώρου οδηγεί σε σύστημα συντεταγμένων ίδιου προσανατολισμού.

Επομένως

1. Το ίδιο προσανατολισμό με το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ έχουν τα συστήματα:
$O\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_1$, $O\vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_2$, $O-\vec{e}_1-\vec{e}_2\vec{e}_3$, $O\vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $O-\vec{e}_1\vec{e}_2-\vec{e}_3$ κ.λ.π.

2. Αντίθετο προσανατολισμό από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ έχουν τα συστήματα:
$O\vec{e}_2\vec{e}_1\vec{e}_3$, $O\vec{e}_3\vec{e}_2\vec{e}_1$, $O\vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_2$, $O-\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, $O\vec{e}_1-\vec{e}_2\vec{e}_3$ κ.λ.π.

Θα λέμε ότι μια διατεταγμένη τριάδα μη συνεπίπεδων διανυσμάτων $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ είναι θετικώς (αρνητικώς) προσανατολισμένη αν για κάθε σημείο O του χώρου το γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{u}\vec{v}\vec{w}$ είναι θετικώς (αρνητικώς) προσανατολισμένο.

1. Αν $\lambda>0$, τότε οι τριάδες $\{\lambda\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, $\{\vec{e}_1,\lambda\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ και $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\lambda\vec{e}_3\}$ έχουν τον ίδιο προσανατολισμό με την $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.

2. Αν $\lambda<0$, τότε οι τριάδες $\{\lambda\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, $\{\vec{e}_1,\lambda\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ και $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\lambda\vec{e}_3\}$ έχουν αντίθετο προσανατολισμό από την $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.

7.2 Εξωτερικό γινόμενο και μικτό γινόμενο διανυσμάτων.

Θεωρούμε ότι ο χώρος είναι προσανατολισμένος (π.χ. ας θεωρηθούν ως θετικώς προσανατολισμένα τα δεξιόστροφα συστήματα.)

Ορισμός 7.2.1. Έστω $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ελεύθερα διανύσματα προσανατολισμένου χώρου.

Εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο του $\vec{u}$ επί το $\vec{v}$ είναι ελεύθερο διάνυσμα που συμβολίζεται με $\vec{u} \times \vec{v}$ και ορίζεται ως εξής:

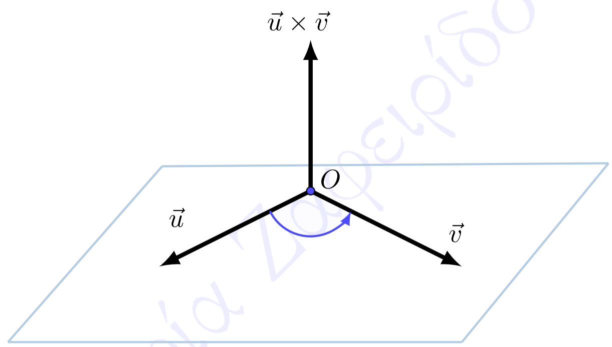
1. Αν $\vec{u} \parallel \vec{v}$, τότε $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

2. Αν $\vec{u} \nparallel \vec{v}$, τότε $\vec{u} \times \vec{v}$ είναι το μοναδικό ελεύθερο διάνυσμα που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

   (α′) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

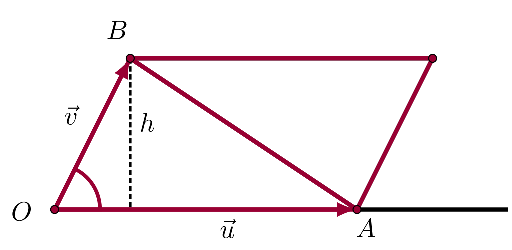
   (β′) $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ και $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$

   (γ′) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένο.



Το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\vec{u}$ επί το διάνυσμα $\vec{v}$ συμβολίζεται επίσης με $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Θεώρημα 7.2.2. (**Γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου.**)
Το εμβαδό του παραλληλόγραμμου πανω στα γραμμικώς ανεξάρτητα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ υπολογίζεται από τον τύπο: $E = |\vec{u} \times \vec{v}|$.



Απόδειξη. Έστω h είναι το ύψος του παραλληλόγραμμου από την κορυφή B προς την ευθεία (OA). Τότε

$$E = h \cdot |\overrightarrow{OA}|, \text{ όπου } h = |\overrightarrow{OB}| \sin(\widehat{AOB}).$$

Συνεπώς

$$E = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \sin(\widehat{AOB}) = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

□

Πόρισμα 7.2.3. *Το εμβαδόν του τριγώνου* $A\overset{\triangle}{O}B$ *υπολογίζεται από τον τύπο:*

$$E_{A\overset{\triangle}{O}B} = \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|}{2}$$

Σημείωση 7.2.4.

1. Για κάθε ελέυθερο διάνυσμα $\vec{u}$ ισχύει: $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$.
2. Αν $\vec{u} \parallel \vec{v}$, τότε $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

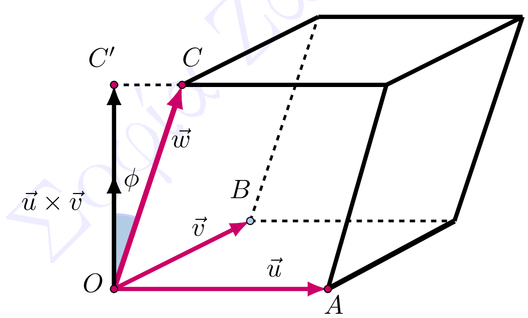
Ορισμός 7.2.5. *Μικτό γινόμενο τριών ελεύθερων διανυσμάτων* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι ο αριθμός $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$, δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\vec{u} \times \vec{v}$ επί το διάνυσμα $\vec{w}$.

Το μικτό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ συμβολίζεται με $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ή με $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
Συνοψίζοντας τα παραπάνω γράφουμε:

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Θεώρημα 7.2.6. (Γεωμετρική ερμηνεία του μικτού γινομένου.)
Εστω $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ μη συνεπίπεδα διανύσματα και V ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές OA, OB, OC. Αν $\{\vec{u}, \vec{v}.\vec{w}\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένα, τότε $\langle \vec{u}, \vec{v}.\vec{w} \rangle = V$. Αν $\{\vec{u}, \vec{v}.\vec{w}\}$ είναι αρνητικώς προσανατπλισμένα, τότε $\langle \vec{u}, \vec{v}.\vec{w} \rangle = -V$.

Απόδειξη. Έστω ότι C' είναι η ορθογώνια προβολή του C στην ευθεία που διέρχεται από το O και είναι κάθετη στο επίπεδο των σημείων O, A, B.



Έχουμε

$$V = |\overrightarrow{OC'}| \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Συμβολίζουμε με ϕ την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{u} \times \vec{v}$ και $\vec{w}$.
Αν $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένα, τότε $\vec{u} \times \vec{v}$ είναι ομόρροπο με το $\overrightarrow{OC'}$. Οπότε

$$|\overrightarrow{OC'}| = |\vec{w}| \cos \phi.$$

Άρα,

$$V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \phi = (\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Αν $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ είναι αρνητικώς προσανατολισμένα, τότε $\vec{u} \times \vec{v}$ είναι αντίρροπο με το $\overrightarrow{OC'}$. Επομένως

$$|\overrightarrow{OC'}| = |\vec{w}| \cos(\pi - \phi) = -|\vec{w}| \cos \phi.$$

Άρα,

$$V = -|\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \phi = -(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) = -\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

□

7.2.1 Ιδιότητες του μικτού γινομένου.

Θεώρημα 7.2.7. *Τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι συνεπίπεδα αν και μόνον αν το μικτό γινόμενο τους ισούται με μηδέν ($\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$).*

Απόδειξη. Εστω $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Τότε $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι συνεπίπεδα, διότι διαφορετικά $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = V$ ή $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = -V$, όπου $V \neq 0$ είναι ο ογκος του παραλληλεπιπέδου πάνω στα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Αντίστροφα, έστω $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι συνεπίπεδα.

Αν $\vec{u} \parallel \vec{v}$, τότε από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. Άρα, $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{0} \cdot \vec{w} = 0$.

Αν $\vec{w} = \vec{0}$, τότε $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Αν $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ και $\vec{w} \neq \overrightarrow{0}$, τότε $\vec{u} \times \vec{v}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Άρα, $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{w}$, οπότε $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$. ☐

Θεώρημα 7.2.8. *Το μικτό γινόμενο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = -\langle \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \rangle = -\langle \vec{w}, \vec{v}, \vec{u} \rangle = -\langle \vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \rangle$
2. $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
3. $\lambda \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w} \rangle$.
4. $\langle \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w} \rangle$,
   $\langle \vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w} \rangle$,
   $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle$

Απόδειξη. 1. Αν $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι συνεπίπεδα, τότε το μικτό γινόμενο τους ισούται με 0 ανεξάρτητα από την διάταξη τους. Επομένως η ιδιότητα 1 ισχύει.

Ας υποθέσουμε ότι τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι μη συνεπίπεδα και V είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου πάνω στα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Αν η τριάδα διανυσμάτων $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένη, τοτε και οι τριάδες διανυσμάτων $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}$ και $\{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένες και οι τριάδες διανυσμάτων $\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}$, $\{\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\}$ και $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\}$ είνα αρνητικώς προσανατολισμένα. Συνεπώς

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = V$$

$$\langle \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \rangle = -V$$

Όμοια γίνεται η απόδειξη στην περίπτωση που τα $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ είναι αρνητικώς προσανατολισμένα.

2. $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

3. Θα αποδείξουμε την πρώτη ισότητα, οι υπόλοιπες δυο ισότητες αποδεικνύονται όμοια.

   Από την ιδιότητα 1, τον ορισμό του μικτού γινομένου και τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έπεται ότι:

   $\lambda \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = \lambda \big((\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} \big) = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \lambda \vec{u} = \langle \vec{v}, \vec{w}, \lambda \vec{u} \rangle = \langle \lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

4. Θα αποδείξουμε την πρώτη ισότητα, οι υπόλοιπες δυο ισότητες αποδεικνύονταο όμοια.

   Από την ιδιότητα 1, τον ορισμό του μικτού γινομένου και τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έπεται ότι:

   $$\langle \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \rangle = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}_1 + (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}_2 = \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_1 \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_2 \rangle = \\ = \langle \vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

☐

7.2.2 Ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
2. $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

Απόδειξη. 1. Αν $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ και $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

Έστω $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$. Θέτουμε $\vec{z} = -(\vec{v} \times \vec{u})$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{z}$.

(i) $|\vec{z}| = |\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}||\vec{u}| \sin(\vec{u}, \vec{v}) == |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} \times \vec{v}|$

(ii) Θα δείξουμε ότι $\vec{z} \perp \vec{u}$ και $\vec{z} \perp \vec{v}$. Πράγματι,
$(\vec{v} \times \vec{u}) \perp \vec{u}$ και $(\vec{v} \times \vec{u}) \perp \vec{v} \Longrightarrow -(\vec{v} \times \vec{u}) \perp \vec{u}$ και $-(\vec{v} \times \vec{u}) \perp \vec{v} \Longrightarrow \vec{z} \perp \vec{u}$ και $\vec{z} \perp \vec{v}$.

(iii) Θα δείξουμε ότι $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένο Πραγματι:
$\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u}\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένο από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου $\Longrightarrow$
$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v} \times \vec{u}\}$ είναι αρνητικώς προσανατολισμένο $\Longrightarrow$
$\{\vec{u}, \vec{v}, -(\vec{v} \times \vec{u})\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένο, όπου $-(\vec{v} \times \vec{u}) = \vec{z}$.

2. Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{u} \parallel \vec{v}$, τότε η ιδιότητα ισχύει.
Έστω $\lambda \neq 0$ και $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ θα δείξουμε ότι $\frac{1}{\lambda}[(\lambda \vec{u}) \times \vec{v}] = \vec{u} \times \vec{v}$. Θέτουμε $\vec{w} = \frac{1}{\lambda}[(\lambda \vec{u}) \times \vec{v}]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$.

(i) $|\vec{w}| = \frac{1}{|\lambda|}|\lambda||\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} \times \vec{v}|$

(ii) Θα δείξουμε ότι $\vec{w} \perp \vec{u}$ και $\vec{w} \perp \vec{v}$. Πράγματι:
$\vec{w} \parallel (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} \Longrightarrow \vec{w} \perp \lambda \vec{u}$ και $\vec{w} \perp \vec{v} \Longrightarrow \vec{w} \perp \vec{u}$ και $\vec{w} \perp \vec{v}$.

(iii) Θα δείξουμε ότι $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένο. Πραγματι:
$\{\lambda \vec{u}, \vec{v}, (\lambda \vec{u}) \times \vec{v}\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένο $\Longrightarrow$
$\{\vec{u}, \vec{v}, \frac{1}{\lambda}[(\lambda \vec{u}) \times \vec{v}]\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένο, όπου $\frac{1}{\lambda}[(\lambda \vec{u}) \times \vec{v}] = \vec{w}$.

3. Θέτουμε $\vec{d} = (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} - \vec{u} \times \vec{w} - \vec{v} \times \vec{w}$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{d} = \vec{0}$. Θα δείξουμε ότι $\vec{d} \cdot \vec{d} = 0$.
$\vec{d} \cdot \vec{d} = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{w}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{d} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w}, \vec{d} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{w}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{d} \rangle = 0.$

□

7.2.3 Εξωτερικό και μικτό γινόμενα στο χώρο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

Θεώρημα 7.2.9. *Έστω $\vec{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ ως προς ένα θετικώς προσανατολισμένο ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε*

1. $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right\}$

2. $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

Απόδειξη. Αν το ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ είναι θετικώς προσανατολισμένο, τότε

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \\ &\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2. \end{aligned}$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}.$$

1. $\vec{u} \times \vec{v} = (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \times (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) =$
$= u_1v_2\vec{e}_3 + u_1v_3(-\vec{e}_2) + u_2v_1(-\vec{e}_3) + u_2v_3\vec{e}_1 + u_3v_1\vec{e}_2 + u_3v_2(-\vec{e}_1) =$
$= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3 =$
$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$

2. $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \left\{ \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right\} \cdot \{w_1, w_2, w_3\} =$
$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

□

Πόρισμα 7.2.10. *Έστω ABC ένα τρίγωνο του επιπέδου π και $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του π. Αν $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε*

$$E_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|$$

Απόδειξη. Έστω $\vec{e}_3$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο π, τότε

$$\left. \begin{matrix} A = (x_A, y_a, 0) \\ B = (x_B, y_B, 0) \\ C = (x_C, y_C, 0) \end{matrix} \right\} \text{ως προς το σύστημα } O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$$

Έχουμε

$$\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, 0\} \\ \overrightarrow{AC} = \{x_C - x_A, y_C - y_A, 0\} \end{matrix}$$

Συνεπώς, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left\{ 0, 0, \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right\}$, οπότε

$$E_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|$$

□

7.3 Ασκήσεις.

7.3.1. Δίνονται οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$, $vecw$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων: $\vec{u} = \{3, 1, 2\}$, $\vec{v} = \{2, 7, 4\}$, $\vec{w} = \{1, 2, 1\}$. Να βρεθούν τα γινόμενα $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ και $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

7.3.2. Να αποδειχθεί ότι αν $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$, τότε τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι συνεπίπεδα.

Λύση.

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = 0 \Rightarrow$$

$$\langle \vec{u}, \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 0$$

Επειδή $\langle \vec{u}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ και $\langle \vec{u}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 0$, έπεται ότι $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Συνεπώς τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι συνεπίπεδα.

7.3.3. Να αποδειχθεί ότι $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$.

7.3.4. Έστω $A = (3, -1, 0)$, $B = (0, -7, 3)$, $C = (-2, 1, -1)$, $D = (3, 2, 6)$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Να βρεθεί το εμβαδό της τομης του τετραέδρου $ABCD$ με το επίπεδο που διέρχεται από τα μέσα των ακμών AB, AD, CD, $,CB$.

7.3.5. Έστω τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι μη μηδενικά και μη παράλληλα ανά δύο. Να αποδειχθεί ότι

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$$

Λύση. $(\Longrightarrow)$ $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u}\times(\vec{u}+\vec{v}+w) = \vec{u}\times\vec{0} \Longrightarrow \vec{u}\times\vec{u}+\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u}\times\vec{v} = -\vec{u}\times\vec{w} = \vec{w}\times\vec{u}$. Όμοια από την $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}$ συμπεραίνουμε ότι $\vec{w} \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$.

$(\Longleftarrow)$ Ας υποθέσουμε ότι $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$. Τότε

$$\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} - \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}.$$

Αρα τα $\vec{u} \parallel (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$. Ομοια αποδεικνύεται ότι $\vec{v} \parallel (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$ και $\vec{w} \parallel (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι αν $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{u} \| \vec{v} \| \vec{w}$, που είναι άτοπο.

7.3.6. Αν $\vec{u} = \{8, 4, 1\}$ και $\vec{v} = \{2, -2, 1\}$, να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{w}$ τέτοιο ώστε $\vec{w} \perp \vec{u}$, $|\vec{w}| = |\vec{u}|$, η γωνία μεταξύ των $\vec{w}$ και $\vec{v}$ να είναι οξεία και τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ να είναι συνεπίπεδα.

7.3.7. Να βρεθεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, αν $O = (x_0, y_0, z_0)$ $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ και $C = (x_C, y_C, z_C)$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

7.3.8. Έστω $K = (2, 0, 1)$ $A = (4, 3, 3)$, $B = (1, 0, 2)$ και $C = (4, 1, 0)$. Να βρεθεί το ύψος του παραλληλεπιπέδου με ακμές $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KC}$ από την κορυφή B προς την έδρα που περιέχει τις κορυφές K, A, C.

7.3.9. Να αποδειχθεί ότι

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{a} & \vec{u} \cdot \vec{b} & \vec{u} \cdot \vec{c} \\ \vec{v} \cdot \vec{a} & \vec{v} \cdot \vec{b} & \vec{v} \cdot \vec{c} \\ \vec{w} \cdot \vec{a} & \vec{w} \cdot \vec{b} & \vec{w} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}$$

Λύση. Έστω ότι ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τα διανύσματα έχουν συντεταγμένες:

$$\vec{u} = \{u_1, u_2, u_3\},\ \vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\},\ \vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\},$$

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\},\ \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\},\ \vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}.$$

Τότε

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{a} & \vec{u}\cdot\vec{b} & \vec{u}\cdot\vec{c} \\ \vec{v}\cdot\vec{a} & \vec{v}\cdot\vec{b} & \vec{v}\cdot\vec{c} \\ \vec{w}\cdot\vec{a} & \vec{w}\cdot\vec{b} & \vec{w}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

7.3.10. Αν $\vec{u}_1 = \{2, 1, -1\}$, $\vec{u}_2 = \{-3, 0, 2\}$ και $\vec{u}_3 = \{5, 1, -2\}$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ τέτοια ώστε

$$\vec{u}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{7.1}$$

Λύση. Έστω $\vec{v}_i = \{v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}\}$ και $\vec{u}_i = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}\}$. Έχουμε από τις ισότητες (7.1)

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1\cdot\vec{v}_1 & \vec{u}_1\cdot\vec{v}_2 & \vec{u}_1\cdot\vec{v}_3 \\ \vec{u}_2\cdot\vec{v}_1 & \vec{u}_2\cdot\vec{v}_2 & \vec{u}_2\cdot\vec{v}_3 \\ \vec{u}_3\cdot\vec{v}_1 & \vec{u}_3\cdot\vec{v}_2 & \vec{u}_3\cdot\vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{t} \cdot \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \Longrightarrow$$

$$\vec{v}_1 = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -1\right\}, \ \vec{v}_2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}, \ \vec{v}_3 = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right\}$$

7.3.11. Έστω τα διανύσματα $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ είναι μη συνεπίπεδα και τα διανύσματα $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ είναι τέτοια ώστε

$$\vec{u}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Να εκφραστούν τα διανύσματα $\vec{v}_j$ ως συναρτήσεις των $\vec{u}_i$.

Λύση. $\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ και $\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0 \Longrightarrow$
$\vec{v}_1 \perp \vec{u}_2$ και $\vec{v}_1 \perp \vec{u}_3 \Longrightarrow \vec{v}_1 \parallel (\vec{u}_2 \times \vec{u}_3) \Longrightarrow \vec{v}_1 = \lambda(\vec{u}_2 \times \vec{u}_3) \Longrightarrow$
$1 = \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{u}_1 \cdot \lambda \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{u}_3) = \lambda\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\rangle \Longrightarrow \lambda = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\rangle^{-1}$.
Από τα παραπάνω $\vec{v}_1 = \dfrac{\vec{u}_2 \times \vec{u}_3}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\rangle}$. Όμοια, $\vec{v}_2 = \dfrac{\vec{u}_3 \times \vec{u}_1}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\rangle}$ και $\vec{v}_3 = \dfrac{\vec{u}_1 \times \vec{u}_2}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\rangle}$.

7.3.12. Αν $\vec{u} = \{u_1, u_2\}$, $\vec{v} = \{v_1, v_2\}$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε το εμβαδό E του παραλληλογράμμου πάνω στα διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right\|$$

Λύση. Συμπληρώνοντας το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ με το διάυσμα $\vec{e}_3$, τέτοιο ώστε $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$ και $|\vec{e}_3| = 1$ παίρνουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντετεγμένων του χώρου $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ως προς το οποίο $\vec{u} = \{u_1, u_2, 0\}$ και $\vec{v} = \{v_1, v_2, 0\}$.

$$E = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{matrix} \right\| = \left| \left\{ 0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right\} \right| = \sqrt{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2} = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right\|$$

Κεφάλαιο 8

Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Το σημείο εκκίνησης για την μελέτη των σχημάτων στο χώρο είναι τα αξιώματα που εκφράζουν της ιδιότητες των ποιο απλών σχημάτων του χώρου, τα οποία είναι: σημείο, ευθεία και επίπεδο. Τα αξιώματα αυτά είναι:

$\mathbf{A_1}$: Σε κάθε επίπεδο ανήκουν τουλάχιστον τρία μη συνευθειακά σημεία.

$\mathbf{A_2}$: Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο, που δεν ανήκει σε ένα δεδομένο επίπεδο.

$\mathbf{A_3}$: Τρία μη συνευθειακά σημεία ανήκουν σε ένα μοναδικό επίπεδο.

$\mathbf{A_4}$: Αν δυο διαφορετικά επίπεδα έχουν κοινό σημείο, τότε τέμνονται κατά ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο αυτό.

$\mathbf{A_5}$: Η ευθεία που διέρχεται από δυο σημεία ενός επιπέδου κείται εξ ολοκλήρου στο επίπεδο αυτό.

$\mathbf{A_6}$: Κάθε επίπεδο χωρίζει τα σημεία του χώρου, που δεν ανήκουν σε αυτό, σε δυο περιοχές ξένες μεταξύ τους.

Βασικά θεωρήματα της στερεομετρίας.

1. Δυο διαφορετικες ευθείες που έχουν κοινό σημείο περιέχονται σε ένα μοναδικό επίπεδο.
2. Αν μια ευθεία είναι παράλληλη στο καθένα από τα δυο διαφορετικά τεμνόμενα επίπεδα, τότε είναι παράλληλη στην ευθεία τομής των επιπέδων αυτών.
3. Αν το επίπεδο π_1 είναι παράλληλο σε δυο τεμνόμενες σε ένα σημείο ευθείες του επιπέδου π_2, τότε $\pi_1 \parallel \pi_2$.
4. Αν η ευθεία ε είναι κάθετη σε δυο τεμνόμενες σε ένα σημείο ευθείες του επιπέδου π, τότε $\varepsilon \perp \pi$.

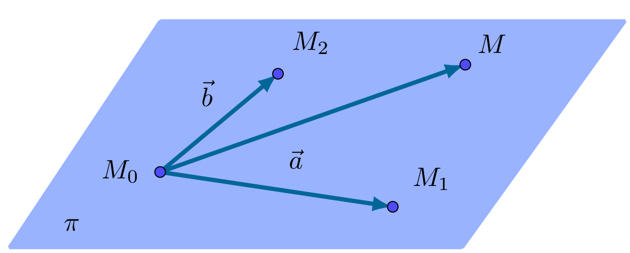
8.1 Εξίσωση επιπέδου.

Έστω επίπεδο π και M_0, M_1, M_2 τριά μη συνευθειακά σημεία του.

Θα εκφράσουμε την ικανή και αναγκαία συνθήκη ένα σημείο του χώρου να ανήκει στο π.

Θέτουμε $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1}$ και $\vec{b} = \overrightarrow{M_0M_2}$, τότε $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$. Ένα σημείο M του χώρου ανήκει στο π αν και μόνον αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_0M}$ είναι συνεπίπεδα, δηλαδή

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \text{ όπου } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{8.1}$$



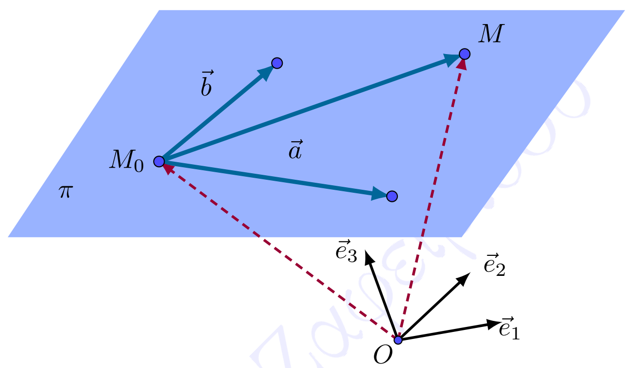
Διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση επιπέδου

Έστω $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου. Για κάθε σημείο N του χώρου συμβολίζουμε με $\overrightarrow{N}$ το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{ON}$ του N.

Τότε $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{M} - \overrightarrow{M_0}$. Άρα, ένα σημείο M του χώρου ανήκει στο π αν και μόνον αν

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_0} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \text{ όπου } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{8.2}$$

Η εξίσωση (8.2) καλείται διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι παράλληλο στα δυο μη παράλληλα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.



Παραμετρικες εξισώσεις επιπέδου

Έστω $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ και $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ και $M = (x, y, z)$ ως προς το γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Η εξίσωση (8.2) γράφεται

$$\{x, y, z\} = \{x_0, y_0, z_0\} + \lambda\{a_1, a_2, a_3\} + \mu\{b_1, b_2, b_3\}$$

Άρα, ένα σημείο $M = (x, y, z)$ του χώρου ανήκει στο π αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Οι εξισώσεις (8.3) καλούνται παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλο στα δυο μη παράλληλα διανύσματα $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ και $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

8.1.1 Καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου

Θεώρημα 8.1.1. *Κάθε επίπεδο του χώρου έχει εξίσωση της μορφής*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| \neq 0 \tag{8.4}$$

ως προς γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου και κάθε εξίσωση της μορφής (5.3) είναι εξίσωση επιπέδου.

Απόδειξη. Έστω π ένα επίπεδο, $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$, $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \parallel \pi$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\} \parallel \pi$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ και $M = (x, y, z)$ ως προς το γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Το σημείο M ανήκει στο π αν και μόνον αν τα διανύσματα $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$ είναι συνεπίπεδα, δηλαδή αν και μόνον αν

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{8.5}$$

Η εξίσωση (8.5) γραφεται

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \text{ όπου} \tag{8.6}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Επειδή $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, τουλάχιστον μία από τις ποιό πάνω ορίζουσες δεν ισούται με το μηδέν. Επομένως $|A| + |B| + |C| \neq 0$. Θέτοντας $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ στην εξίσωση (8.6), παίρνουμε τις σχέσεις (8.4).

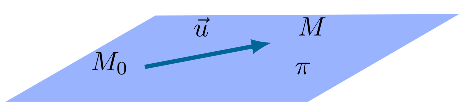
Αντίστροφα, έστω δίνεται μια εξίσωση της μορφής (8.4). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \neq 0$. Θα δείξουμε ότι το επίπεδο π που διέρχεται από το σημείο $M_1 = (-\frac{D}{A}, 0, 0)$ και είναι παράλληλο στα διανύσματα $\vec{a}_1 = \{-\frac{B}{A}, 1, 0\}$ και $\vec{b}_1 = \{-\frac{C}{A}, 0, 1\}$ έχει εξίσωση (8.4).

Πράγματι, ένα σημείο $M = (x, y, z)$ ανήκει στο π αν και μόνον αν τα διανύσματα $\overrightarrow{M_1M}, \vec{a}_1, \vec{b}_1$ είναι συνεπίπεδα, δηλαδή αν και μόνον αν

$$\begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & y & z \\ -\frac{B}{A} & 1 & 0 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

□

Θεώρημα 8.1.2. *Ένα διάνυσμα $\vec{u} = \{a, b, c\}$ είναι παράλληλο στο επίπεδο $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ αν και μόνον αν $Aa + Bb + Cc = 0$.*



Απόδειξη. Έστω $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$, τότε $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Έστω M ένα σημείο του χώρου τέτοιο ώστε $\overrightarrow{M_0M} = \vec{u}$, τότε $M = (x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c)$. Επομένως

$$\begin{aligned} &\vec{u} \parallel \pi \Longleftrightarrow M \in \pi \Longleftrightarrow \\ &A(x_0 + a) + B(y_0 + b) + C(z_0 + c) + D = 0 \Longleftrightarrow \\ &(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + Aa + Bb + Cc = 0 \Longleftrightarrow \\ &Aa + Bb + Cc = 0 \end{aligned}$$

□

Παραδείγματα 8.1.3.

1. Θεωρούμε το επίπεδο $\pi : 3x + 2y - 5z + 20 = 0$.

   Ένα διάνυσμα παράλληλο στο π είναι το $\vec{u} = \{5, -5, 1\}$, διότι αντικαθιστώντας τα x, y, z στην εξίσωση $3x + 2y - 5z = 0$, βρίσκουμε $3 \cdot (5) + 2 \cdot (-5) - 5 \cdot (1) = 0$.

2. Το επίπεδο που περιέχει το σημείο $M_0 = (3, 4, 5)$ και είναι παράλληλο στα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{a} = \{-2, 1, 0\}$ και $\vec{b} = \{-1, -4, 6\}$ έχει εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 6(x-3) + 12(y-4) + 9(z-5) = 0 \Longleftrightarrow 6x + 12y + 9z - 121 = 0.$$

3. Θα βρούμε τις παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου $\pi : 3x + 2y - 5z + 20 = 0$.

   Ένα σημείο του π είναι το $M_0 = (2, -3, 4)$, διότι οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση του π. Ένα διάνυσμα παράλληλο στο π είναι το $\vec{a} = \{0, 5, 2\}$, διότι αντικαθιστώντας τα x, y, z στην εξίσωση $3x + 2y - 5z = 0$ με 0,5, 2 αντίστοιχα, βρίσκουμε $3 \cdot (0) + 2 \cdot (5)y - 5 \cdot (2) = 0$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στο π και μη παράλληλο στο $\vec{a}$ είναι το $\vec{b} = \{-2, 3, 0\}$. Άρα, οι παραμετρικές εξισώσεις 8.3 γράφονται:

$$\begin{aligned} x &= 2 + 0 \cdot \lambda - 2\mu \\ y &= -3 + 5\lambda + 3\mu \\ z &= 4 + 2\lambda + 0 \cdot \mu \end{aligned}$$

8.2 Σχετική θέση επιπέδων.

Θεώρημα 8.2.1. *Έστω ότι τα επίπεδα π_1 και π_2 έχουν εξισώσεις*

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{8.7}$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{8.8}$$

1. $\pi_1 = \pi_2 \Longleftrightarrow A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1$ *και* $D_2 = \lambda D_1$ *όπου* $\lambda \neq 0$

2. $\pi_1 \parallel \pi_2 \Longleftrightarrow A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1$ *και* $D_2 \neq \lambda D_1$ *όπου* $\lambda \neq 0$

3. π_1 *και* π_2 *τέμνονται κατά μια ευθεία* $\Longleftrightarrow$ *δεν υπάρχει* $\lambda \neq 0$ *τέτοιος ώστε* $A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,$ $C_2 = \lambda C_1$.

Απόδειξη. 1. Έστω $A_1 \neq 0$, τότε $\left\{-\frac{B_1}{A_1}, 1, 0\right\} \parallel \pi_1$ και $\left\{-\frac{C_1}{A_1}, 0, 1\right\} \parallel \pi_1$.

Επειδή $\pi_1 \parallel \pi_2$, έπεται ότι $\left\{-\frac{B_1}{A_1}, 1, 0\right\} \parallel \pi_2$ και $\left\{-\frac{C_1}{A_1}, 0, 1\right\} \parallel \pi_2$.

Άρα, $A_2\left(-\frac{B_1}{A_1}\right) + B_2 = 0$ και $A_2\left(-\frac{C_1}{A_1}\right) + C_2 = 0$.

Για $\lambda = \frac{A_2}{A_1}$ παίρνουμε $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$. Επίσης $\lambda \neq 0$, επειδή διφορετικά $A_2 = B_2 = C_2 = 0$, που είναι άτοπο.

Έστω $(x_0, y_0, z_0) \in \pi_1 = \pi_2$, τότε

$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda A_1x_0 + \lambda B_1y_0 + \lambda C_1z_0 + D_2 = 0 \Longrightarrow$$

$$-\lambda D_1 + D_2 = 0 \Longrightarrow D_2 = \lambda D_1.$$

Αντίστροφα, αν $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$ και $D_2 = \lambda D_1$, όπου $\lambda \neq 0$, τότε οι εξισώσεις (8.7) και (8.8) έχουν τις ίδιες λύσεις, δηλαδή $\pi_1 = \pi_2$.

2. Αν $\pi_1 \parallel \pi_2$, τότε κάθε διάνυσμα παράλληλο στο π_1 είναι παράλληλο στο π_2. Όμοια όπως και στη περίπτωση $\pi_1 = \pi_2$ αποδεικνύεται ότι υπάρχει $\lambda \neq 0$ τέτοιο ώστε $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$. Όμως $D_2 \neq \lambda D_1$, επειδή σε αντίθετη περίπτωση $\pi_1 = \pi_2$, που είναι άτοπο.

Αντίστροφα, αν $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$ και $D_2 \neq \lambda D_1$, όπου $\lambda \neq 0$, τότε οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} A_1 a + B_1 b + C_1 c &= 0 \\ A_2 a + B_2 b + C_2 c &= 0 \end{aligned}$$

που δίνουν τα διανύσματα $\{a, b, c\}$ παράλληλα στα π_1 και π_2, αντίστοιχα, έχουν τις ίδιες λύσεις. Άρα, κάθε διάνυσμα παράλληλο στο π_1 είναι παράλληλο στο π_2. Επομένως $\pi_1 = \pi_2$ ή $\pi_1 \parallel \pi_2$. Επειδή όμως $D_2 \neq \lambda D_1$, τα επίπεδα δεν ταυτίζονται. Άρα, $\pi_1 \parallel \pi_2$.

3. π_1 και π_2 τέμνονται κατά μια ευθεία, αν και μόνον αν $\pi_1 \neq \pi_2$ και $\pi_1 \nparallel \pi_2$, δηλάδη αν και μόνον αν δεν υπάρχει $\lambda \neq 0$ τέτοιος ώστε $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$. □

Θεώρημα 8.2.2. *Δύο σημεία $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ανήκουν σε διφορετικούς ημιχώρους ως προς το επίπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$, αν και μόνον αν*

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0$$

Απόδειξη. M_1 και M_2 ανήκουν σε διαφορετικούς ημιχώρους

$\iff M_1M_2 \cap \pi = \{M\}$

$\iff \overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$, οπου $\lambda > 0$ και $M \in \pi$

$\iff$ υπάρχει $M = \left(\dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right) \in \pi$, $\lambda > 0$

$\iff A\left(\dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\right) + B\left(\dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right) + C\left(\dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right) + D = 0$, $\lambda > 0$

$\iff Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = -\lambda(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D)$, $\lambda > 0$

$\iff (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0$ □

Πόρισμα 8.2.1. *Το επίπεδο $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ χωρίζει το χώρο σε δύο ημιχώρους π^- και π^+, όπου*
$\pi^- = \{M = (x, y, z) : Ax + By + Cz + D < 0\}$
$\pi^+ = \{M = (x, y, z) : Ax + By + Cz + D > 0\}$.

Θεώρημα 8.2.3. *Αν M_0 είναι ένα σημείο του επιπέδου*

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

και $\overrightarrow{M_0M} = \{A, B, C\}$, τότε $M \in \pi^+$.

Απόδειξη. Αν $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$, τότε $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Επειδή $\overrightarrow{M_0M} = \{A, B, C\}$, $M = (x_0 + A, y_0 + B, z_0 + C)$. Συνεπώς

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C(z_0 + C) + D = (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + A^2 + B^2 + C^2 = A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Άρα $M \in \pi^+$. □

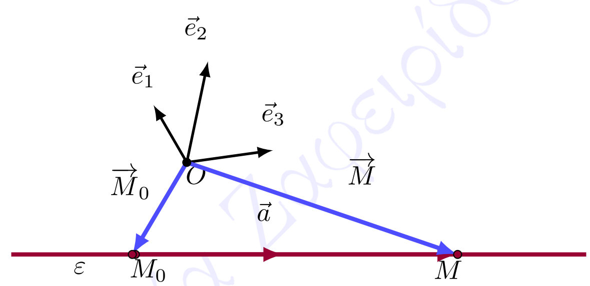
8.3 Ευθεία στο χώρο.

Έστω ε μία ευθεία, $M_0 \in \varepsilon$ και $\vec{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο στην ε. Ένα σημείο M του χώρου ανήκει στην ε αν και μόνον αν

$$\overrightarrow{M_0 M} = t\vec{a}, \text{ όπου } t \in \mathbb{R} \tag{8.9}$$

Διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση της ευθείας.

Έστω $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου.



Τότε $\overrightarrow{M_0 M} = \overrightarrow{M} - \overrightarrow{M_0}$. Οπότε η εξίσωση (8.9) γράφεται

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_0} + t\vec{a}, \text{ όπου } t \in \mathbb{R} \tag{8.10}$$

Η εξίσωση (8.10) καλείται *διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση της ευθείας* ε που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}$.

Παραμετρικες εξισώσεις ευθείας

Έστω $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ και $M = (x, y, z)$ ως προς το γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Η εξίσωση (5.10) γράφεται

$$\{x, y, z\} = \{x_0, y_0, z_0\} + t\{a_1, a_2, a_3\}$$

Άρα, ένα σημείο $M = (x, y, z)$ του χώρου ανήκει στην ε αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t \\ y &= y_0 + a_2 t \\ z &= z_0 + a_3 t, \text{ όπου } t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{8.11}$$

Οι εξισώσεις (8.11) καλούνται *παραμετρικές εξισώσεις* της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Κανονικές εξισώσεις ευθείας.

Αν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a}$ είναι διάφορες του μηδενός, δηλαδή $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ και $a_3 \neq 0$, τότε η ε γράφεται ως τομή επιπέδων ως εξής:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a_1} = \dfrac{y-y_0}{a_2} \\ \dfrac{x-x_0}{a_1} = \dfrac{z-z_0}{a_3} \end{cases}$$

Αν μία συντεταγμένη του $\vec{a}$ είναι μηδέν και δύο είναι διάφορες του μηδένός, π.χ. $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ και $a_3 \neq 0$, τότε η ε γράφεται ως τομή επιπέδων ως εξής:

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \dfrac{y-y_0}{a_2} = \dfrac{z-z_0}{a_3} \end{cases}$$

Αν δύο συντεταγμένες του $\vec{a}$ είναι μηδέν και μία είναι διάφορη του μηδενός, π.χ. $a_1 = a_2 = 0$ και $a_3 \neq 0$, τότε η ε γράφεται ως τομή επιπέδων ως εξής:

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$$

Σε καθεμιά από τις παραπάνω τρεις περιπτώσεις οι δύο εξισώσεις γράφονται συμβολικά σε μία εξίσωση:

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} \tag{8.12}$$

η οποία καλείται *κανονική εξίσωση* της ε.

Θεώρημα 8.3.1. *Αν η ευθεία ε είναι ευθεία τομής των επιπέδων π_1 και π_2, όπου*

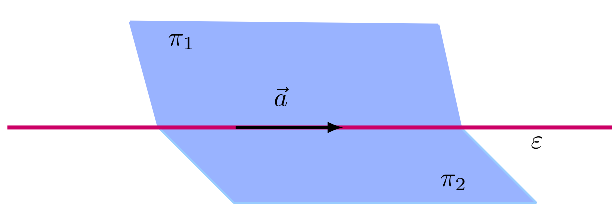
$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{8.13}$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{8.14}$$

τότε το διάνυσμα

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

είναι μη μηδενικό και παράλληλο στην ε.



Απόδειξη. Επειδή τα επίπεδα π_1 και π_2 τέμνονται κατά ευθεία $\{A_1, B_1, C_1\} \neq \lambda\{A_2, B_2, C_2\}$ για κάθε $\lambda \neq 0$. Συνεπώς μια τουλάχιστον από τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

είναι διάφορη του μηδενός. Άρα, $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Έχουμε

$$A_1\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_1\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

και

$$A_2\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_2\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_2\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

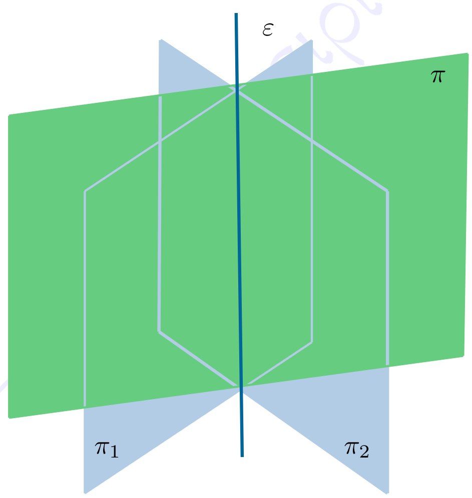
Σύνεπώς $\vec{a} \parallel \pi_1$ και $\vec{a} \parallel \pi_2$. Άρα, το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι παράλληλο στην ευθεία τομής ε των επιπέδων π_1 και π_2. □

Θεώρημα 8.3.2. *Ένα επίπεδο π διέρχεται από την ευθεία τομής ε των επιπέδων*

$$\begin{aligned} \pi_1 :& A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 :& A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned} \tag{8.15}$$

αν και μόνον αν υπάρχουν $k, m \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $k^2 + m^2 \neq 0$ και

$$\pi : k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{8.16}$$



Απόδειξη. Έστω ένα επίπεδο π με εξίσωση $Ax + By + Cz + D = 0$ περιέχει την ευθεία τομής ε των επιπέδων π_1 και π_2. Τότε

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} \parallel \epsilon \parallel \pi$$

Τότε

$$A\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα,

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

Επειδή τα επίπεδα π_1 και π_2 τέμνονται κατά ευθεία, για καθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\{A_1, B_1, C_1\} \neq \lambda\{A_2, B_2, C_2\}$, άρα $\{A, B, C\} = k\{A_1, B_1, C_1\} + m\{A_2, B_2, C_2\}$. Οπότε

$$\pi : (kA_1 + mA_2)x + (kB_1 + mB_2)y + (kC_1 + mC_2)z + D = 0. \tag{8.17}$$

Για κάθε σημείο (x_0, y_0, z_0) της $\varepsilon = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi$ έχουμε

$$(kA_1 + mA_2)x_0 + (kB_1 + mB_2)y_0 + (kC_1 + mC_2)z_0 + D = 0$$
$$(kA_1 + mA_2)x_0 + (kB_1 + mB_2)y_0 + (kC_1 + mC_2)z_0 + (kD_1 + mD_2) = 0$$

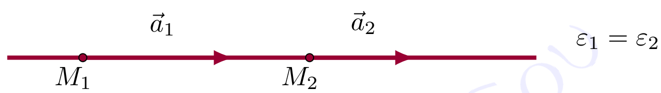
Άρα, $D = kD_1 + mD_2$.

Αντίστροφα, αν $k, m \in \mathbb{R}$ και $k^2 + m^2 \neq 0$, τότε κάθε τιάδα αριθμών (x, y, z) που ικανοποιεί τις εξισώσεις (8.15) ικανοποιεί την εξίσωση (;;) Συνεπώς κάθε σημείο της ε ανήκει στο π, δηλαδή $\varepsilon \subseteq \pi$. $\square$

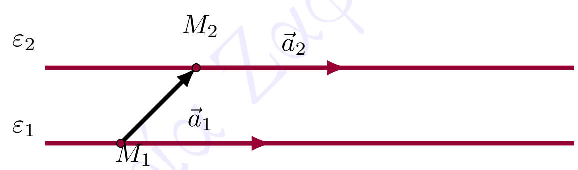
8.4 Σχετική θέση δύο ευθειών στο χώρο.

Έστω $\varepsilon_1 : \overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}_1 + t\vec{a}_1$ και $\varepsilon_2 : \overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}_2 + t\vec{a}_2$ δύο ευθείες του χώρου.

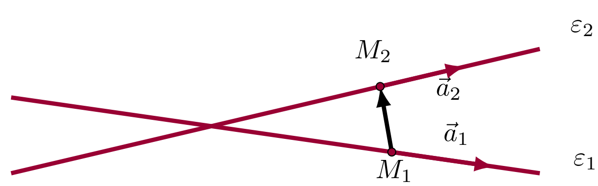
1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Longleftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$



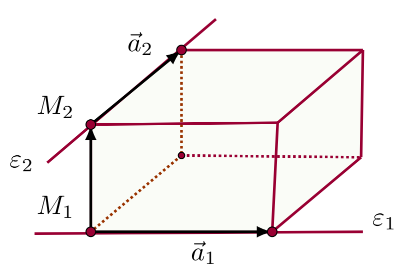
2. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Longleftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$



3. ε_1 και ε_2 τέμνονται σε ένα σημείο $\Longleftrightarrow \vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$ και τα διανύσματα $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ και $\overrightarrow{M_1M_2}$ είναι συνεπίπεδα.



4. ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες $\Longleftrightarrow$ τα διανύσματα $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ και $\overrightarrow{M_1M_2}$ είναι μη συνεπίπεδα.



8.5 Απόσταση σημείου από την ευθεία και επίπεδο.

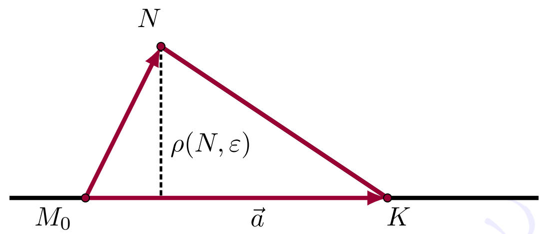
Ορισμός 8.5.1. Συμβολίζουμε με $\rho(M,N)$ την απόσταση μεταξύ των σημειων M και N του χώρου.

Η απόσταση $\rho(\Phi,\Phi')$ μεταξύ των δυο συνόλων Φ και Φ' του χώρου ορίζεται ως εξής

$$\rho(\Phi,\Phi') = \inf\{\rho(M,M')|M\in\Phi, M'\in\Phi'\}$$

Θεώρημα 8.5.2. *Η απόσταση του σημείου N από την ευθεία ε υπολογίζεται από τον τύπο:*

$$\rho(N,\varepsilon) = \frac{|\overrightarrow{M_0N}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|},\ \text{όπου } M_0\in\varepsilon \text{ και } \vec{a}\parallel\varepsilon.$$



Απόδειξη. Αν $N\in\varepsilon$, τότε $\rho(N,\varepsilon)=0$.

Από την άλλη μερια, $\overrightarrow{M_0N}\parallel\vec{a}$ και συνεπώς $\overrightarrow{M_0N}\times\vec{a}=\vec{0}$. Άρα, $\frac{|\overrightarrow{M_0N}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|}=0=\rho(N,\varepsilon)$.

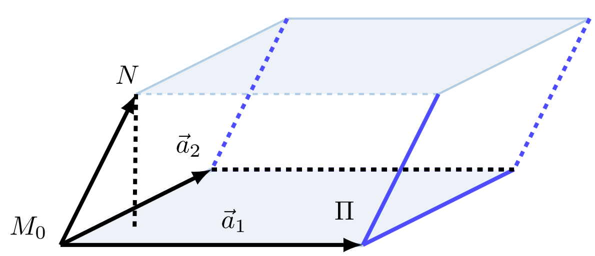
Έστω $N\notin\varepsilon$ και $K\in\varepsilon$ είναι τέτοιο ώστε $\overrightarrow{M_0K}=\vec{a}$. Τότε $\rho(N,\varepsilon)$ είναι το ύψος του τριγώνου KM_0N πάνω στα διανύσματα $\overrightarrow{M_0N}$ και $\vec{a}$ συνεπώς

$$E_{KMN} = \frac{|\vec{a}|\cdot\rho(N,\varepsilon)}{2} = \frac{|\overrightarrow{M_0N}\times\vec{a}|}{2} \Longrightarrow \rho(N,\varepsilon) = \frac{|\overrightarrow{M_0N}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

□

Θεώρημα 8.5.3. *Η απόσταση του σημείου N από το επίπεδο Π υπολογίζεται από τον τύπο:*

$$\rho(N,\Pi) = \frac{|\langle\overrightarrow{M_0N},\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}\ ,\ \text{όπου } M_0\in\Pi,\ \vec{a}_1\parallel\Pi, \vec{a}_2\parallel\Pi \text{ και } \vec{a}_1\nparallel\vec{a}_2.$$



Απόδειξη. Αν $N\in\Pi$, τότε $\rho(N,\Pi)=0$. Από την άλλη μερια, τα διανύσματα $\overrightarrow{M_0N},\vec{a}_1,\vec{a}_2$ είναι συνεπίπεδα και συνεπώς $\langle\overrightarrow{M_0N},\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle=0$. Άρα, $\frac{|\langle\overrightarrow{M_0N},\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}=0=\rho(N,\Pi)$.

Έστω $N\notin\Pi$ και P είναι το παραλληλεπιπέδο πάνω στα μη συνεπίπεδα διανύσματα $\overrightarrow{M_0N},\vec{a}_1,\vec{a}_2$. Τότε το εμβαδόν της βάσης του P ισούται με $|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|$ και το $\rho(N,\Pi)$ είναι το ύψος του P. Για τον όγκο V_P του P έχουμε

$$V_p = |\vec{a}_1\times\vec{a}_2|\cdot\rho(N,\Pi) = |\langle\overrightarrow{M_0N},\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle| \Longrightarrow \rho(N,\Pi) = \frac{|\langle\overrightarrow{M_0N},\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|}$$

□

8.6 Απόσταση μεταξύ των ευθειών.

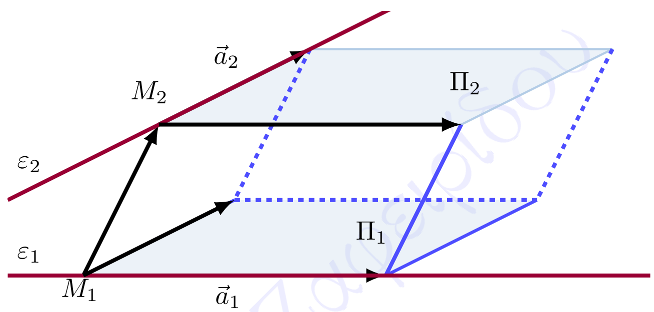
Θεώρημα 8.6.1. *Η απόσταση μεταξύ των παράλληλων ευθειών* ε_1 *και* ε_2 *υπολογίζεται από τον τύπο:*

$$\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}, \text{ όπου } M_1 \in \varepsilon_1,\ M_2 \in \varepsilon_2 \text{ και } \vec{a} \parallel \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2.$$

Απόδειξη. $\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \rho(M_1, \varepsilon_2) = \dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$ από το Θεώρημα 8.5.2. □

Θεώρημα 8.6.2. *Η απόσταση μεταξύ των ασύμβατων ευθειών* ε_1 *και* ε_2 *υπολογίζεται από τον τύπο:*

$$\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}\ , \text{ όπου } M_1 \in \varepsilon_1,\ M_2 \in \varepsilon_2,\ \vec{a}_1 \parallel \varepsilon_1,\ \vec{a}_2 \parallel \varepsilon_2.$$



Απόδειξη. Έστω Π_1 το επίπεδο που περιέχει την ε_1 και είναι παράλληλο στην ε_2 και Έστω Π_2 το επίπεδο που περιέχει την ε_2 και είναι παράλληλο στην ε_1. Τότε από το Θεώρημα **;;**:

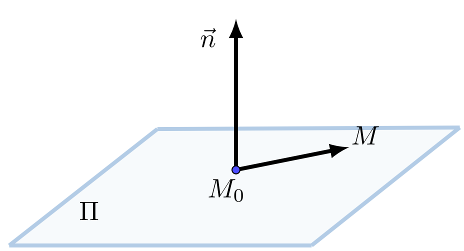
$$\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \rho(\Pi_1, \Pi_2) = \rho(M_1, \Pi_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

□

8.7 Επίπεδο στο χώρο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Θεώρημα 8.7.1. *Αν* $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *και* $\vec{n} = \{n_1, n_2, n_3\} \neq \overrightarrow{0}$ *ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων* $Oxyz$*, τότε το επίπεδο που περιέχει το σημείο* M_0 *και είναι κάθετο στο διάνυσνα* $\vec{n}$ *έχει καρτεσιανή εξίσωση*

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0. \qquad (8.18)$$



Απόδειξη. Ένα σημείο $M = (x, y, z)$ ανήκει στο επίπεδο π που περιέχει το σημείο M_0 και είναι κάθετο στο $\vec{n}$ αν και μόνον αν είτε το διάνυσμα $\overrightarrow{M_0M}$ είναι κάθετο στο $\vec{n}$ είτε $M = M_0$, δηλαδή αν και μόνο αν $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Συνεπώς το π αποτελείται από όλα τα σημεία που ικανοποιούν την εξίσωση

$$(\overrightarrow{M} - \overrightarrow{M}_0) \cdot \vec{n} = 0. \tag{8.19}$$

Έχουμε $\overrightarrow{M} - \overrightarrow{M}_0 = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

Επειδή το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό, έπεται ότι

$$(\overrightarrow{M} - \overrightarrow{M}_0) \cdot \vec{n} = n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0). \tag{8.20}$$

Από τις ισότητες 8.19 και 8.20 έπεται ο τύπος 8.18. □

Θεώρημα 8.7.2. *Αν ένα επίπεδο Π έχει εξίσωση $Ax + By + Cz + D = 0$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε το διάνυσμα $\vec{n} = \{A, B, C\}$ είναι κάθετο στο Π.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το διάνυσμα $\vec{n}$ είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα παράλληλο στο επίπεδο Π.

Έστω $\vec{u} = \{a, b, c\} \parallel \Pi$, τότε $Aa + Bb + Cc = 0$. Όμως $Aa + Bb + Cc = \vec{n} \cdot \vec{u}$, άρα $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, συνεπώς $\vec{n} \perp \vec{u}$. □

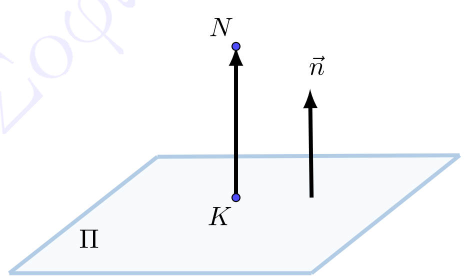
Θεώρημα 8.7.3. *Αν ένα επίπεδο Π έχει εξίσωση $Ax+By+Cz+D = 0$ και ένα σημείο N έχει συντεταγμένες (x_N, y_N, z_N) ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε η απόσταση του N από το Π υπολογίζεται από τον τύπο*

$$\rho(N, \Pi) = \frac{|Ax_N + By_N + Cz_N + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Απόδειξη. Αν $N \in \Pi$, τότε $\rho(N, \Pi) = 0$ και $Ax_N + By_N + Cz_N + D = 0$, άρα ο παραπάνω τύπος ισχύει.

Έστω $N \notin \Pi$ και $K = (x_K, y_K, z_K)$ είναι η ορθογώνια προβολή του N στο Π.

Τότε $\rho(N, \Pi) = |\overrightarrow{KN}|$ και $Ax_K + By_K + Cz_K + D = 0$.



Επειδή $\overrightarrow{KN} \perp \Pi$ και $\vec{n} = \{A, B, C\} \perp \Pi$ συνεπάγεται ότι $\overrightarrow{KN} \parallel \vec{n}$. Άρα, $\cos(\widehat{\overrightarrow{KN}, \vec{n}}) = \pm 1$. Οπότε

$$\overrightarrow{KN} \cdot \vec{n} = \left|\overrightarrow{KN}\right| \cdot |\vec{n}| \cos(\widehat{\overrightarrow{KN}, \vec{n}}) = \pm\left|\overrightarrow{KN}\right| \cdot |\vec{n}| \Longrightarrow |\overrightarrow{KN} \cdot \vec{n}| = \left|\overrightarrow{KN}\right| \cdot |\vec{n}| \Longrightarrow |\overrightarrow{KN}| = \frac{|\overrightarrow{KN} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Έχουμε ότι $\overrightarrow{KN} = \{x_N - x_K, y_N - y_K, z_N - z_K\}$ και $\vec{n} = \{A, B, C\}$. Όποτε

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{KN} \cdot \vec{n}\right| &= \left|A(x_N - x_K) + B(y_N - y_K) + C(z_N - z_K)\right| = \\ &= \left|(Ax_N + By_N + Cz_N) - \underbrace{(Ax_K + By_K + Cz_K)}_{-D}\right| = \left|Ax_N + By_N + Cz_N + D\right|\end{aligned}$$

Επίσης $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Συνεπώς, $\rho(N, \Pi) = |\overrightarrow{KN}| = \dfrac{|Ax_N + By_N + Cz_N + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. □

8.8 Ευθεία στο επίπεδο

Έστω π ένα επίπεδο και ε μια ευθεία του π.

Αν $M_0 \in \varepsilon$ και $\vec{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο στην ε, τότε ένα σημείο M του π ανήκει στην ε αν και μόνον αν

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}, \text{ όπου } t \in \mathbb{R} \tag{8.21}$$

Διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση της ευθείας.

Έστω $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του π.

Τότε $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M} - \overrightarrow{M_0}$. Οπότε η εξίσωση (8.21) γράφεται

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_0} + t\vec{a}, \text{ όπου } t \in \mathbb{R} \tag{8.22}$$

Η εξίσωση (8.22) καλείται διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}$.

Παραμετρικες εξισώσεις ευθείας

Έστω $M_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$ και $M = (x, y)$ ως προς το γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Η εξίσωση (8.22) γράφεται

$$\{x, y\} = \{x_0, y_0\} + t\{a_1, a_2\}$$

Άρα, ένα σημείο $M = (x, y)$ του επιπέδου ανήκει στην ε αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta_1 \\ y &= y_0 + ta_2 \end{aligned} \tag{8.23}$$

Οι εξισώσεις (8.23) καλούνται παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M_0 = (x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$.

Κανονικές εξισώσεις ευθείας.

Εκφράζοντας το t από τις (8.23) παίρνουμε:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \tag{8.24}$$

Η εξίσωση (8.24) καλείται *κανονική εξίσωση* της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\{a_1, a_2\} \neq \vec{0}$.

Αν $a_1 = 0$, τότε η ε έχει εξίσωση: $x = x_0$. Αν $a_2 = 0$, τότε η ε έχει εξίσωση: $y = y_0$.

Γενική (καρτεσιανή) εξίσωση ευθείας.

Θεώρημα 8.8.1. *Κάθε ευθεία του επιπέδου ενος επιπέδου π ως προς ένα γενικό συστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ του π έχει εξίσωση της μορφής*

$$Ax + By + C = 0, \text{ όπου } A^2 + B^2 \neq 0 \tag{8.25}$$

και κάθε εξίσωση της μορφής (8.25) ως προς το σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ του π είναι εξίσωση μιας ευθείας του π.

Παρατήρηση 8.8.1. Αν μια ευθεία ε ενός επιπέδου π έχει ως προς ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ του π εξίσωση $Ax + By + C = 0$ και $\vec{e}_3$ ένα διάνυσμα του χώρου μη παράλληλο στο π, τότε στο σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ του χώρου η ε ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} Ax + By + C = & 0, \\ z = & 0. \end{cases}$

Θεώρημα 8.8.2. *Μια ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$ διέρχεται από το σημείο τομής ε των ευθειών*

$$\varepsilon_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{8.26}$$
$$\varepsilon_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{8.27}$$

αν και μόνον αν υπάρχουν $k, m \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $k^2 + m^2 \neq 0$ και

$$Ax + By + C = k(A_1x + B_1y + C_1) + m(A_2x + B_2y + C_2). \tag{8.28}$$

Θεώρημα 8.8.3. *Ένα διάνυσμα $\vec{u} = \{a, b\}$ είναι παράλληλο στην ευθεία $Ax + By + C = 0$ αν και μόνον αν $Aa + Bb = 0$.*

Πόρισμα 8.8.1. *Αν η ευθεία ε ενός επιπέδου π έχει εξίσωση $Ax+By+C = 0$ ως προς ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ του π , τότε το διάνυσμα $\{-B, A\}$ είναι παράλληλο στην ε.*

Θεώρημα 8.8.4. *Έστω ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 ενός επιπέδου έχουν εξισώσεις*

$$\varepsilon_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$\varepsilon_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

1. *$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Longleftrightarrow A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1$ και $C_2 = \lambda C_1$ όπου $\lambda \neq 0$*
2. *$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Longleftrightarrow A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1$ και $C_2 \neq \lambda C_1$ όπου $\lambda \neq 0$*
3. *ε_1 και ε_2 τέμνονται σε ένα σημείο $\Longleftrightarrow$ δεν υπάρχει $\lambda \neq 0$ τέτοιος ώστε $A_2 = \lambda A_1$ και $B_2 = \lambda B_1$.*

Θεώρημα 8.8.5. *Έστω π ένα επίπεδο και $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του π. Θεωρούμε τα σύνολα*

$$\varepsilon^- = \{M = (x, y) \in \pi : Ax + By + C < 0\}$$
$$\varepsilon^+ = \{M = (x, y) \in \pi : Ax + By + C > 0\}$$

Τα σύνολα ε^- και ε^+ είναι τα δύο ημιεπίπεδα στα οποία η ευθεία $\varepsilon : Ax + By + C = 0$ χωρίζει το επίπεδο π.

Ευθεία στο επίπεδο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Έστω π ένα επίπεδο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.
Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $Ax+By+C = 0$ ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε ο αριθμός $k = -\frac{A}{B}$ καλείται συντελιστής διεύθυνσης της ε.

Θεώρημα 8.8.6. *Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $Ax + By + C = 0$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε το διάνυσμα $\vec{n} = \{A, B\}$ είναι κάθετο στην ε.*

Θεώρημα 8.8.7. *Ένα σημείο M ανήκει στην ευθεία που περιέχει το σημείο M_0 και είναι κάθετη στο διάνυσνα $\vec{n}$ αν και μόνον αν*

$$(\overrightarrow{M} - \overrightarrow{M}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Πόρισμα 8.8.2. *Αν $M_0 = (x_0, y_0)$ και $\vec{n} = \{n_1, n_2\} \neq \overrightarrow{0}$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy του επιπέδου π, τότε η ευθεία του π που περιέχει το σημείο M_0 και είναι κάθετη στο διάνυσνα $\vec{n}$ έχει ως προς Oxy εξίσωση*

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0.$$

Θεώρημα 8.8.3. *Αν φ είναι η γωνία μεταξύ των ευθειών*

$$\varepsilon_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

τότε

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Πόρισμα 8.8.3. *Οι ευθείες*

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 :& A_1x + B_1y + C_1 = 0\\ \varepsilon_2 :& A_2x + B_2y + C_2 = 0\end{aligned}$$

είναι κάθετες αν και μόνον αν $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Θεώρημα 8.8.4. *Η απόσταση του σημείο* $M = (x_M, y_M)$ *του π από την ευθεία* $\varepsilon : Ax + By + C = 0$ *υπολογίζεται από τον τύπο*

$$\rho(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8.9 Ασκήσεις.

Ευθεία και επίπεδο στον χώρο με γενικό σύστημα συντεταγμένων

8.9.1. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας $\varepsilon : \begin{cases} x - 3y + z = 0\\ x + y - z + 4 = 0\end{cases}$

8.9.2. Να γραφεί ως τομή επιπέδων η ευθεία $\varepsilon : \begin{cases} x = 3 + 4t\\ y = 2 - 5t\\ z = -1 + 8t\end{cases}$

8.9.3. Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου $\Pi : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda + 3\mu\\ y = 5 + 4\mu\\ z = 7 + \lambda\end{cases}$

8.9.4. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου $\Pi : x - 2y + z - 4 = 0$.

8.9.5. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις και η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου Π αν

(α) $M_0 = (2, 3, -5) \in \Pi,\ \{-5, 6, 4\} \parallel \Pi$ και $\{2, -1, 0\} \parallel \Pi$

(β) $M_1 = (2, 1, 3) \in \Pi,\ M_2 = (2, 4, 0) \in \Pi$ και $\{-5, -4, 4\} \parallel \Pi$.

(γ) $M_1 = (3, 5, -1),\ M_2 = (7, 5, 3),\ M_3 = (5, 3, -3) \in \Pi$.

8.9.6. Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία $d : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = 5$.

Λύση. Η d ως τομή επιπέδων γράφεται

$$d : \begin{cases} x = 10\\ y = 15\end{cases} \iff d : \begin{cases} x - 10 = 0\\ y - 15 = 0\end{cases}$$

Βρίσκουμε το διάνυσμα παράλληλο στην d

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} \right\} = \{0, 0, 1\}$$

8.9.7. Να προσδιοριστεί η σχετική θέση των ευθειών d_1 και d_2, αν

(α) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t\\ y = 7 + t\\ z = 3 + 4t\end{cases}$ $\quad d_2 : \begin{cases} x = 6 + 3t\\ y = -1 - 2t\\ z = -2 + t\end{cases}$

(β) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -t \end{cases}$ $d_2 : \begin{cases} x = -2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$

(γ) $d_1 : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases}$ $d_2 : \begin{cases} x = 7 - 6t \\ y = 2 + 9t \\ z = 12t \end{cases}$

(δ) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = 2 + 6t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ $d_2 : \begin{cases} x = 7 + 6t \\ y = 6 + 4t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$

Λύση. (α) $M_1 = (1, 7, 3) \in d_1$, $\vec{a}_1 = \{2, 1, 4\} \parallel d_1$,
$M_2 = (6, -1, -2) \in d_2$, $\vec{a}_2 = \{3, -2, 1\} \parallel d_2$.
$\vec{a}_1 \neq \lambda\vec{a}_2 \Longrightarrow \vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2 \Longrightarrow d_1$ και d_2 ή τέμνονται ή είναι ασύμβατες.
$\overrightarrow{M_1M_2} = \{5, -8, -5\}$, συνεπώς

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Δηλαδή τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Συνεπώς οι ευθείες τέμνονται.

(β) $M_1 = (1, 2, 0) \in d_1$, $\vec{a}_1 = \{2, -2, -1\} \parallel d_1$,
$M_2 = (0, -5, 4) \in d_2$, $\vec{a}_2 = \{-2, 3, 0\} \parallel d_2$.
$\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2 \Longrightarrow d_1$, d_2 ή τέμνονται σε ένα σημείο ή είναι ασύμβατες.
Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ είναι συνεπίπεδα.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, -7, 4\} \Longrightarrow \det \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

Άρα, οι ευθείες είναι ασύμβατες.

(γ) $M_1 = (2, 0 - 1) \in d_1$, $\vec{a}_1 = \{4, -6, -8\} \parallel d_1$,
$M_2 = (7, 2, 0) \in d_2$, $\vec{a}_2 = \{-6, 9, 12\} \parallel d_2$.
$\vec{a}_1 = -\frac{2}{3}\vec{a}_2 \Longrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \Longrightarrow d_1$, d_2 ή είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.
Επειδή $\overrightarrow{M_1M_2} = \{5, 2, 1\} \nparallel \vec{a}_1 \Longrightarrow d_1 \neq d_2$. Άρα, οι ευθείες είναι παράλληλες.

(δ) $M_1 = (1, 2, 3) \in d_1$, $\vec{a}_1 = \{9, 6, 3\} \parallel d_1$,
$M_2 = (7, 6, 5) \in d_2$, $\vec{a}_2 = \{6, 4, 2\} \parallel d_2$.
$\vec{a}_1 = \frac{3}{2}\vec{a}_2 \Longrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \Longrightarrow d_1$, d_2 ή είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.
Επειδή $\overrightarrow{M_1M_2} = \{6, 4, 2\} \parallel \vec{a}_1 \Longrightarrow d_1 = d_2$.

8.9.8. Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες d_1 και d_2 τέμνονται, να βρεθεί το σημείο τομής τους και η εξίσωση του επιπέδου τους.

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

8.9.9. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας ε η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει καθεμιά από τις ευθείες ε_1, ε_2 σε ένα σημείο, αν

$$\varepsilon_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \varepsilon_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$$

8.9.10. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας ε, αν είναι γνωστό ότι $\varepsilon \parallel \varepsilon_1$ και τέμνει καθεμιά από τις ευθείες ε_2 και ε_3 σε ένα σημείο, αν

$$\varepsilon_1 : \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases} \quad \varepsilon_2 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4t \end{cases} \quad \varepsilon_3 : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -1 \\ z = 4 - t \end{cases}$$

8.9.11. Να γραφεί η εξίσωση του επιπέδου Π_0 που είναι παράλληλο στο επίπεδο $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ και διέρχεται από το σημείο $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Λύση. $\Pi_0 \parallel \Pi \Longrightarrow \Pi_0 : Ax + By + Cz + D_0 = 0$
$M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Pi_0 \Longrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0 = 0. \Longrightarrow D_0 = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$
Από τα παραπάνω:

$$\Pi_0 : Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0.$$

8.9.12. Δίνεται επίπεδο $\Pi : x + y + z - 10 = 0$ και ευθεία

$$\varepsilon : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Να μελετηθεί αν η ε περιέχεται στο Π, είναι παράλληλη στο Π, ή τέμνει το Π σε ένα σημείο.

Λύση. Αντικαθεστώντας τα x, y και z στην εξίσωση του επιπέδου από τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας παίρνουμε την εξίσωση

$$t + (1 - t) + (3 + t) - 10 = 0 \Longleftrightarrow t = 7$$

Από τις παραμετρικές εξισώσεις της ε, για $t = 7$, παίρνουμε το σημείο τομής $M_0 = (7, -6, 10)$ της ευθείας ε με το επίπεδο Π.

8.9.13. Δίνονται οι εξισώσεις τριών εδρών ενός παραλληλεπιπέδου

$$\begin{aligned} \Pi_1 : 2x + 3y + 4z - 12 &= 0 \\ \Pi_2 : x + 3y - 6 &= 0 \\ \Pi_3 : z + 5 &= 0 \end{aligned}$$

και μία κορυφή $A = (6, -5, 1)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων τριών εδρών του παραλληλεπιπέδου.

Λύση. Από τις εξισώσεις των επιπέδων Π_1, Π_2, Π_3 συμπεραίνουμε ότι δεν είναι παράλληλα ανά δύο, επομένως $\Pi_1 \bigcap \Pi_2 \bigcap \Pi_3 = \{B\}$, όπου B είναι μία κορυφή του παραλληλεπιπέδου.

Οι συντεταγμένες του A δεν ικανοποιούν καμιά από τις εξισώσεις των επιπέδων, άρα A είναι η απέναντι από το B κορυφή. Συμβολίζουμε με Π_1^*, Π_2^*, Π_3^* τις έδρες που περιέχουν το A και είναι παράλληλες στα Π_1, Π_2 και Π_3, αντίστοιχα. Τότε

$$\Pi_1^* : 2x + 3y + 4z + D_1 = 0, \quad \Pi_2^* : x + 3y + D_2 = 0, \quad \Pi_3^* : z + D_3 = 0.$$

Επειδή $A = (6, -5, 1)$ είναι κοινό σημείο των επιπέδων Π_1^*, Π_2^*, Π_3^*, ισχύει
$D_1 = -(2 \cdot 6 + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 1) = -1$, $D_2 = -(6 + 3 \cdot (-5)) = 9$, $D_3 = -1$. Άρα,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: 2x + 3y + 4z - 1 = 0 \\ \Pi_2 &: x + 3y + 9 = 0 \\ \Pi_3 &: z - 1 = 0 \end{aligned}$$

8.9.14. Να γραφεί η εξίσωση του επιπέδου Π που είναι παράλληλο στον άξονα Ox και περιέχει την ευθεία

$$\varepsilon : \begin{cases} 6x - y + z = 0 \\ 5x + 3z - 10 = 0 \end{cases}$$

8.9.15. Να βρεθεί η ικανή και ανακγαία συνθήκη ώστε το σημείο $F = (x_F, y_F, z_F)$ να βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων

$$\Pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$$
$$\Pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

Λύση. Έστω $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ το επίπεδο που διέρχεται από το F και είναι παράλληλο στο Π_1 . Τότε $Ax_F + By_F + Cz_F + D = 0$ και συνεπώς

$$Ax_F + By_F + Cz_F = -D.$$

Έστω $F_1 = (x_1, y_2, z_1)$ και $F_1 = (x_1, y_2, z_1)$ οι ορθογώνιες προβολές του F στα επίπεδα Π_1 και Π_2, αντίστοιχα. Τότε $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0$ και $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0$, συνεπώς

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D_1$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 = -D_2$$

F βρίσκεται μεταξύ των Π_1 και $\Pi_2 \iff F_1$ και F_2 είναι σε διαφορετικούς ημιχώρους ως προς το $\Pi \iff$

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0 \iff$$

$$(D - D_1)(D - D_2) < 0 \iff$$

$$(Ax_F + By_F + Cz_F + D_1)(Ax_F + By_F + Cz_F + D_2) < 0.$$

8.9.16. Να προσδιοριστεί αν το σημείο $F = (5, 6, 1)$ βρίσκεται στο χώρο μεταξύ των επιπέδων

$$\Pi_1 : 3x + 4y + 2z - 10 = 0$$
$$\Pi_2 : 3x + 4y + 2z + 5 = 0$$

8.9.17. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των επιπέδων

$$\Pi_1 : 8x + 4y + z + 1 = 0$$
$$\Pi_2 : 2x - 2y + z + 1 = 0$$

εντός της οποίας βρίσκεται το σημείο $F = (1, 1, 1)$.

8.9.18. Δίνονται το επίπεδο $\Pi : 2x - 4y + z + 14 = 0$ και τα σημεία $A = (-3, 1, 5)$, $B = (5, 4, 2)$.

Να μελετηθεί αν το Π τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα AB, ή την προέκτασή του AB πέρα από το A, ή την προέκτασή του AB πέρα από το B.

Ευθεία και επίπεδο στο χώρο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

Στις ασκήσεις που ακολουθούν το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό.

8.9.19. Έστω $A = (1, 2, 3)$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Να γραφούν οι εξισώσεις:

(α) Της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox.

(β) Της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στο επίπεδο Oxy.

(γ) Της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στον άξονα Ox.

(β) Της ευθείας που διέρχεται από το A και την αρχή των αξόνων.

8.9.20. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των ασύμβατων ευθειών d_1 και d_2, αν

(α) $d_1 : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-2t \\ z = -t \end{cases}$ $d_2 : \begin{cases} x = -2t \\ y = -5+3t \\ z = 4 \end{cases}$

(β) $d_1 : \begin{cases} x-3y+z=0 \\ x+y-z+4=0 \end{cases}$ $d_2 : \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+2t \\ z = 4 \end{cases}$

Λύση.

(α) $M_1 = (1,2,0) \in d_1$, $\vec{a}_1 = \{2,-2,-1\} \parallel d_1$,
$M_2 = (0,-5,4) \in d_2$, $\vec{a}_2 = \{-2,3,0\} \parallel d_2$.
Η απόσταση μεταξύ $\rho(d_1,d_2)$ των ασύμβατων ευθειών d_1 και d_2 υπολογίζεται από τον τύπο

$$\rho(d_1,d_2) = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \rangle|}{|\ \vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Έχουμε $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1,-7,4\}$ Επειδή το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό, βρίσκουμε:

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \rangle = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -9$$

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \{3,2,2\}$$

$$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{3^2+2^2+2^2} = \sqrt{17}$$

Οπότε $\rho(d_1,d_2) = \dfrac{9}{\sqrt{17}}$.

(β) $M_1 = (3,-1,4) \in d_2$, $\vec{a}_1 = \{1,2,0\} \parallel d_2$.

$$\vec{a}_1 = \left\{ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{2,2,4\} \parallel d_1$$

Θέτοντας $z=0$ στο σύστημα των εξισώσεων από τις οποίες ορίζεται η d_1, παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x-3y=0 \\ x+y+4=0 \end{cases}$$

η μοναδική λύση του οποίου είναι η $(-3,-1)$. Άρα, $M_2 = (-3,-1,0) \in d_2$.
Συνεχίζουμε όπως στην άσκηση (α).

8.9.21. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των παράλληλων ευθειών d_1 και d_2, αν

(α) $d_1 : \begin{cases} x = 2+4t \\ y = -6t \\ z = -1-8t \end{cases}$ $d_2 : \begin{cases} x = 7-6t \\ y = 2+9t \\ z = 12t \end{cases}$

(β) $d_1 : \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y+4z=0 \end{cases}$ $d_2 : \begin{cases} 2x+3y+6z-6=0 \\ 3x+4y+7z=0 \end{cases}$

Λύση. (α) Αν $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$ και $\vec{a} \parallel d_1 (\parallel d_2)$, τότε

$$\rho(d_1, d_2) = \rho(M_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

Βρίσκουμε $M_1 = (2, 0-1) \in d_1$, $M_2 = (7, 2, 0) \in d_2$ και $\vec{a} = \{4, -6, -8\} \parallel d_1$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{5, 2, 1\} \Longrightarrow |\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}| = \sqrt{(\vec{a})^2 \cdot (\overrightarrow{M_1M_2})^2 - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{M_1M_2})^2} = \sqrt{116 \cdot 30 - 0^2}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{116}$, άρα $\rho(d_1, d_2) = \sqrt{30}$

(β) Έχουμε $M_1 = (1, 0, 0) \in d_1$, $M_2 = (0, -14, 8) \in d_2$ και

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{3, -4, 1\} \parallel d_1.$$

Η απόσταση μεταξύ των ευθειών βρίσκεται όπως στην (α).

8.9.22. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του σημείου $F(1, 3, 5)$ στην ευθεία

$$\varepsilon : \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

Λύση. Έστω $F_1 = (x_1, y_1, z_1)$ είναι η ορθογώνια προβολή του F στην d. Βρίσκουμε ένα διάνυσμα $\vec{a} \| d$.

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{1, -1, -1\}$$

$\overrightarrow{FF_1} = \{x_1 - 1, y_1 - 3, z_1 - 5\}$ και $\overrightarrow{FF_1} \perp \vec{a}$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FF_1} \cdot \vec{a} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x_1 - 1) \cdot 1 + (y_1 - 3) \cdot (-1) + (z_1 - 5) \cdot (-1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 + y_1 + z_1 + 7 = 0 \end{aligned}$$

Επειδή $F_1 \in d$, F_1 είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + z_1 - 1 = 0 \\ 3x_1 + y_1 + 2z_1 - 3 = 0 \\ x_1 + y_1 + z_1 + 7 = 0 \end{cases} \Longrightarrow F_1 = (-2, 1, 4).$$

8.9.23. Να αποδειχθεί ότι η ορθογώνια προβολη του σημείο $F = (x_F, y_F, z_F)$ πάνω στην ευθεία ε : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ είναι λύση ως προς (x, y, z) του συστήματος $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \\ a(x - x_F) + b(y - y_F) + c(z - z_F) = 0 \end{cases}$

8.9.24. Να βρεθεί το σημείο συμμετρικό του $M = (4, 3, 10)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases}$

8.9.25. Να αποδειχθεί ότι το σημείο συμμετρικό του $F = (x_F, y_F, z_F)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

είναι λύση ως προς (x, y, z) του συστήματος $\begin{cases} \frac{x + x_F}{2} = x_0 + at \\ \frac{y + y_F}{2} = y_0 + bt \\ \frac{z + z_F}{2} = z_0 + ct \\ a(x - x_F) + b(y - y_F) + c(z - z_F) = 0 \end{cases}$

8.9.26. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή της ευθείας ε στο επίπεδο $\Pi_0 : 2x + 3y + 4z - 5 = 0$, αν

$$\varepsilon : \begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 3 + 5t \\ z = 7 + 3t \end{cases}$$

8.9.27. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή της ευθείας ε στο Oxy-επίπεδο, αν $\varepsilon : \begin{cases} 5x + 8y - 3z + 9 = 0 \\ 2x - 4y + z - 1 = 0 \end{cases}$

8.9.28. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή της ευθείας $\varepsilon : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

στο επίπεδο $\Pi_0 : Ax + By + Cz + D = 0$, αν $\varepsilon \not\perp \Pi_0$.

Λύση. Αν $\varepsilon \not\perp \Pi_0$ η ορθογώνια προβολή της ε είναι ευθεία, την συμβολίζουμε με ε'.
Έστω Π το επίπεδο που περιέχει την ε και είναι κάθετο στο Π_0, τότε

$$\Pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

Επειδή $\varepsilon' = \Pi_0 \cap \Pi$, βρίσκουμε:

$$\varepsilon' : \begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

8.9.29. Να βρεθεί καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο $M_0 = (1, 2, 3)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = \{4, 5, 6\}$.

8.9.30. Να βρεθεί καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο $M_0 = (1, 2, 3)$ και είναι κάθετο στην ευθεία $\varepsilon : \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

8.9.31. Να βρεθεί καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο $M_0 = (1, 2, 3)$ και είναι κάθετο στον άξονα Oz.

8.9.32. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του σημείου $A = (1, 0, 1)$ στο επίπεδο $\Pi : 2x + 3y + 4z + 5 = 0$.

8.9.33. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του σημείου $A = (3, 5, 8)$ στο επίπεδο

$$\Pi : 2x + 3y + 4z + 5 = 0.$$

8.9.34. Να αποδειχθεί ότι η ορθογώνια προβολη του σημείου $F = (x_F, y_F, z_F)$ πάνω στο επίπεδο

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

είναι λύση ως προς (x, y, z) του συστήματος

$$\begin{cases} x = x_F + At \\ y = y_F + Bt \\ z = z_F + Ct \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

8.9.35. Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο του $A = (1, 3, 4)$ ως προς το επίπεδο $\Pi : 3x + y - 2z = 0$.

8.9.36. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των επιπέδων

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: Ax + By + Cz + D_1 = 0 \\ \Pi_2 &: Ax + By + Cz + D_2 = 0 \end{aligned}$$

Λύση. Έστω $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Pi_1 \Longrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D_1 \Longrightarrow$

$$\rho(\Pi_1, \Pi_2) = \rho(M_0, \Pi_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

8.9.37. Να γραφεί η εξίσωση του επιπέδου Π^* που είναι παράλληλο προς το επίπεδο

$$\Pi : 2x + y - 4z + 5 = 0$$

και απέχει απόσταση $\sqrt{21}$ από το σημείο $F = (1, 2, 0)$.

8.9.38. Να γραφούν οι εξισώσεις των επιπέδων που διχοτομούν τις δίεδρες γωνίες που σχηματίζουν τα επίπεδα:

$$\Pi_1 : \ 7x + y - 6 = 0$$

$$\Pi_2 : \ 3x + 5y - 4z + 1 = 0$$

8.9.39. Να γραφεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τον άξονα Oy και ισαπέχει από τα σημεία $M_1 = (2, 7, 3)$ και $M_2 = (-1, 1, 0)$.

8.9.40. Να αποδειχθεί ότι αν ένα επίπεδο Π τέμνει τους άξονες Ox, Oy και Oz ενός ορθοκανονικού συστήματος στα σημεία $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ και $(0, 0, c)$, αντίστοιχα, τότε

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{\rho^2},$$

όπου ρ είναι η απόσταση του Π από την αρχή των αξόνων.

Λύση. Έστω $P = (x_P, y_P, z_P)$ η προβολή του της αρχής O στο επίπεδο Π, τότε $|\overrightarrow{OP}| = \rho$.

Το τρίγωνο $P\overset{\triangle}{O}A$ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία $\widehat{P}$ και υποτείνουσα OA.
Επομένως για $\phi = \widehat{POA}$ έχουμε: $\cos\phi = \frac{\rho}{a}$.
Έστω $P_x = (x_P, 0, 0)$ η προβολή του P στον Ox, τότε $|x_P| = |\overrightarrow{OP}_x| = \overrightarrow{OP}\cos\phi = \frac{\rho^2}{a}$.
Ομοια, $|y_P| = \frac{\rho^2}{b}$, $|z_P| = \frac{\rho^2}{c}$.
Άρα, $\rho = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2} = \rho^2\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \Longrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{\rho^2}$.

8.9.41. Να βρεθεί η κοινή κάθετος των ασύμβατων ευθειών ε_1 και ε_2, αν

$$\varepsilon_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad \varepsilon_2 : \begin{cases} x = -2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$$

Κεφάλαιο 9

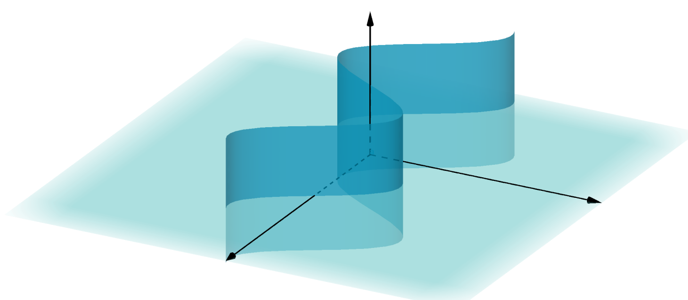
Επιφάνειες 2ου βαθμού

Στο κεφάλαιο αυτό υπό τον όρο “ καμπύλη” θα εννοούμε μια αλγεβρική καμπύλη ενός επιπέδου.

Ενα σύνολο Γ σημείων ενός επιπέδου π καλείται *αλγεβρική καμπύλη*, αν σε κάποιο γενικό σύστημα συντεταγμένων του π το Γ συμπίπτει με το σύνολο όλων των λύσεων (x, y) μιας εξίσωσης $F(x, y) = 0$, όπου $F(x, y)$ είναι πολυώνυμο δύο μετεβλητών.

9.1 Κυλινδρικές επιφάνειες

Έστω π ένα επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει το π σε ένα σημείο. Θεωρούμε μια καμπύλη γ του π. Η ένωση όλων των ευθειών που είναι παράλληλες στη ε και τέμνουν την γ καλείται κυλινδρική επιφάνεια με διευθύνουσα την γ και γενέτειρες παράλληλες στην ϵ.



Σχήμα 9.1: Κυλινδρική επιφάνεια $y = \sin x$

Θεώρημα 9.1.1. *Έστω ότι $Oxyz$ είναι ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου και γ είναι μια καμπύλη του Oxy επιπέδου.*

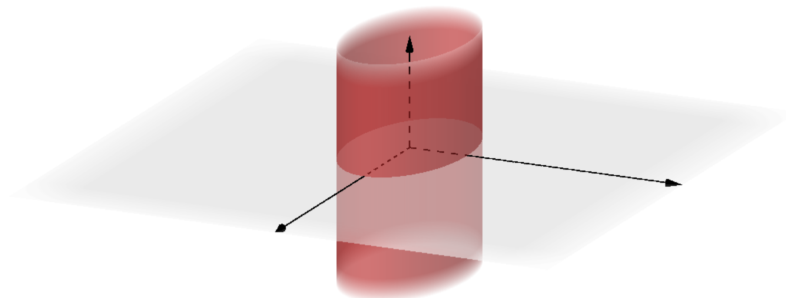
Αν η γ έχει εξίσωση $F(x, y) = 0$ ως προς Oxy, τότε η κυλινδρική επιφάνεια E_γ με διευθύνουσα τη γ και γενέτειρες παράλληλες στον άξονα Oz έχει εξίσωση $F(x, y) = 0$ ως προς $Oxyz$.

Απόδειξη. Έστω $M = (x, y, z)$ ένα σημείο του χώρου και $M' = (x, y, 0)$ η προβολή του M στο π παράλληλα στον Oz. Το σημείο M ανήκει στην E αν και μόνον αν $M' = (x, y, 0) \in \gamma$, δηλαδή αν και μόνον αν $F(x, y) = 0$.

Άρα, $F(x, y) = 0$ είναι η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας E στο $Oxyz$. □

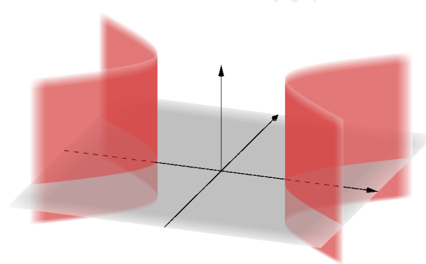
Παραδείγματα 9.1.2. Στα παραδείγματα που ακολουθούν το σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ είναι ορθοκανονικό.

1. Η κυλινδρική επιφάνεια με διευθύνουσα την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ του Oxy-επιπέδου και γενέτειρες παράλληλες στον Oz έχει στο σύστημα $Oxyz$ εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και καλείται ελλειπτικός κύλινδρος.



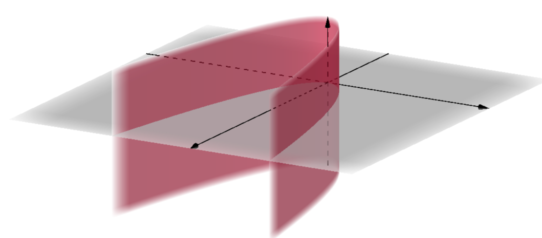
Σχήμα 9.2: Ελλειπτικός κύλινδρος

2. Η κυλινδρική επιφάνεια με διευθύνουσα την υπερβολή $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ του Oxy-επιπέδου και γενέτειρες παράλληλες στον Oz έχει στο σύστημα $Oxyz$ εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ και καλείται υπερβολικός κύλινδρος.



Σχήμα 9.3: Υπερβολικός κύλινδρος

3. Η κυλινδρική επιφάνεια με διευθύνουσα την παραβολή $y^2 = 2px$ του Oxy-επιπέδου και γενέτειρες παράλληλες στον Oz έχει στο σύστημα $Oxyz$ εξίσωση $y^2 = 2px$ και καλείται παραβολικός κύλινδρος.



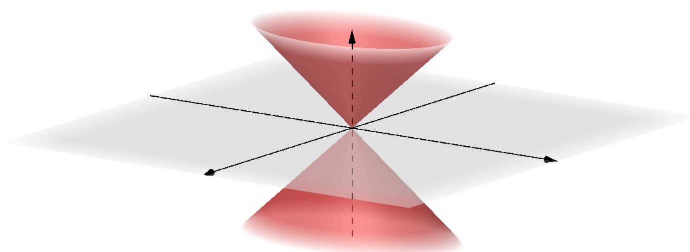
Σχήμα 9.4: Παραβολικός κύλινδρος

9.2 Κωνικές επιφάνειες.

Έστω π ένα επίπεδο και O ένα σημείο που δεν ανήκει στο π. Θεωρούμε μια καμπύλη γ στο π. Η ένωση όλων των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το O και τέμνουν την γ καλείται κωνική επιφάνεια με διευθύνουσα την γ και κορυφή το O. Οι ευθείες που διέρχονται από το O και τέμνουν την γ καλούνται γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας.

Παράδειγμα 9.2.1. Θα βρούμε την εξίσωση της κωνικής επιφάνειας K που έχει ως κορυφή την αρχή O ενός ορθοκανονικού συστήματος $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ και οδηγό την έλλειψη

$$\gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$



Σχήμα 9.5: Κώνος $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Έστω $M = (x, y, z) \neq O$ ένα σημείο του χώρου και M' το σημείο τομής της ευθείας (OM) με το επίπεδο $z = c$. Τότε $M' = (x', y', c)$ στο σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

$M' \in (OM) \Longrightarrow \overrightarrow{OM'} = t\overrightarrow{OM} \Longrightarrow \{x', y', c\} = t\{x, y, c\}$

$\Longrightarrow x' = tx,\ y' = ty,\ c = tz$

$\Longrightarrow t = \frac{c}{z},\ x' = \frac{c}{z}x,\ y' = \frac{c}{z}y,$ αν $z \neq 0$

$M \in K \Longleftrightarrow M' \in \gamma \Longleftrightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, όπου $x' = \frac{c}{z}x$, $y' = \frac{c}{z}y \Longleftrightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Η συντεταγμένες τις κορυφής $O = (0, 0, 0)$ ικανοποιούν επίσης την παραπάνω εξίσωση.

9.3 Επιφάνειες εκ περιστροφής.

Σε ένα επίπεδο π θεωρούμε μια ευθεία ε και μια καμπύλη γ. Η επιφάνεια E που παράγεται όταν η γ περιστρέφεται γύρω από την ε καλείται επιφάνεια εκ περιστροφής.

Θεώρημα 9.3.1. *Έστω $Oxyz$ ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου.*

Αν μια καμπύλη γ του Oxy-επιπέδου έχει εξίσωση $F(x, y) = 0$ ως προς το σύστημα Oxy και είτε είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy, είτε βρίσκεται σε ένα απο τα ημιεπίπεδα στα οποία ο Oy χωρίζει το επίπεδο Oxy, τότε η επιφάνεια E που παράγεται όταν η γ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Oy έχει ως προς το σύστημα $Oxyz$ εξίσωση

$$F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0.$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με Π_ϕ το επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα Oy και σχηματίζει γωνία ϕ με το επίπεδο Oxy.

$M(x,y,z) \in E$ αν και μόνον αν υπάρχει επίπεδο Π_ϕ τέτοιο ώστε $M \in E \cap \Pi_\phi$. Στο Π_ϕ θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα $Ox_\phi y$, όπου $Ox_\phi \perp Oy$. Στο $Ox_\phi y$ η καμπύλη $\gamma_\phi = \Pi_\phi \cap E$ έχει εξίσωση $F(x_\phi, y) = 0$. Αν $M = (x,y,z) \in \gamma_\phi$, τότε $x_\phi = \sqrt{x^2+z^2}$. Συνεπώς η εξίσωση της E είναι

$$F(\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0.$$

□

Σημείωση 9.3.2. Η επιφάνεια που παράγεται όταν η καμπύλη $F(x,y) = 0$ του Oxy-επιπέδου περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Ox έχει εξίσωση $F(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0$

Με περιστροφή της καμπύλης $F(x,z) = 0$ του Oxz-επιπέδου γύρω από τον άξονα Ox παράγεται επιφάνεια με εξίσωση $F(x, \sqrt{y^2+z^2})$.

Παραδείγματα 9.3.3.

1. Θεωρούμε τον κύκλο $x^2+y^2=a^2$ του Oxy- επιπέδου. Θέτουμε $F(x,y) = x^2+y^2-a^2$.

   Η επιφάνεια που παράγεται όταν ο κύκλος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Oy είναι σφαίρα με εξίσωση

   $$F(\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0 \Longleftrightarrow (\sqrt{x^2+z^2})^2 + y^2 - a^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2+z^2+y^2 = a^2.$$

2. Θεωρούμε την παραβολή $x^2 = 2pz$, $p > 0$ του Oxz- επιπέδου. Θέτουμε $F(x,z) = x^2 - 2pz$.

   Η επιφάνεια που παράγεται όταν η υπερβολή περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Oz έχει εξίσωση

   $$F(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \Longleftrightarrow (\sqrt{x^2+y^2})^2 - 2pz = 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z$$

   και καλείται παραβολοειδές εκ περιστροφής.

9.4 Ελλειψοειδές

Με την περιστροφή της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ γύρω από τον άξονα Ox παράγεται επιφάνεια με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Ορισμός 9.4.1. Η επιφάνεια που παράγεται με περιστροφή της έλλειψης γύρω από τον άξονα της καλείται *ελλειψοειδές εκ περιστροφής*.

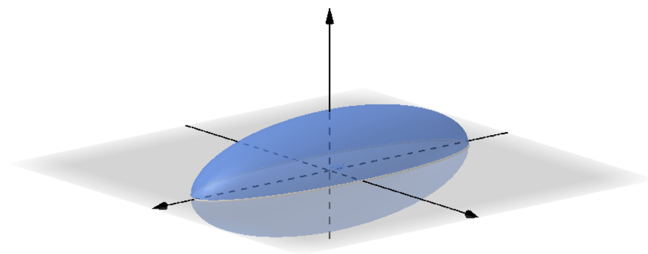
Θεωρούμε την απεικόνιση $f : R^3 \to R^3$ με $f(x,y,z) = (x,y,kz)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής απεικονίζεται στην επιφάνεια η οποία καλείται *ελλειψοειδές* και έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{k^2b^2} = 1.$$

Θέτουμε $k^2b^2 = c^2$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Σχήμα 9.6: Ελλειψοειδές

9.5 Τα υπερβολοειδή.

Με την περιστροφή της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ γύρω από τον άξονα Ox παράγεται επιφάνεια με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Ορισμός 9.5.1. Η επιφάνεια που παράγεται με περιστροφή της υπερβολής γύρω από τον πραγματικό άξονα της καλείται *δίχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής*.

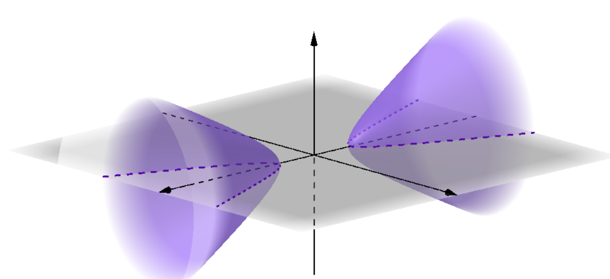
Θεωρούμε την απεικόνιση $f : R^3 \to R^3$ με $f(x, y, z) = (x, y, kz)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Το δίχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής απεικονίζεται στην επιφάνεια η οποία καλείται *δίχωνο υπερβολοειδές* και έχει έξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{k^2b^2} = 1.$$

Θέτουμε $k^2b^2 = c^2$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Σχήμα 9.7: Δίχωνο υπερβολοειδές

Με την περιστροφή της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ γύρω από τον άξονα Oy παράγεται επιφάνεια με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Ορισμός 9.5.2. Η επιφάνεια που παράγεται με περιστροφή της υπερβολής γύρω από τον φανταστικό άξονα της καλείται *μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής*.

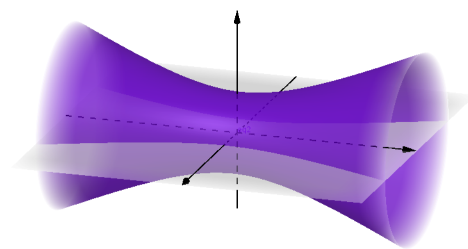
Θεωρούμε την απεικόνιση $f : R^3 \to R^3$ με $f(x, y, z) = (x, y, kz)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Το μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής απεικονίζεται στην επιφάνεια η οποία καλείται *μονόχωνο υπερβολοειδές* και έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{k^2a^2} = 1.$$

Θέτουμε $k^2a^2 = c^2$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Σχήμα 9.8: Μονόχωνο υπερβολοειδές

9.6 Τα παραβολοειδή.

Με την περιστροφή της παραβολής $x^2 = 2pz$, $p > 0$, γύρω από τον άξονα της Oz παράγεται επιφάνεια με εξίσωση

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z.$$

Ορισμός 9.6.1. Η επιφάνεια που παράγεται με περιστροφή της παραβολής γύρω από τον άξονα της καλείται *παραβολοειδές εκ περιστροφής*.

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : R^3 \to R^3$ με $f(x, y, z) = (x, ky, z)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Το παραβολοειδές εκ περιστροφής απεικονίζεται στην επιφάνεια η οποία καλείται *ελλειπτικό παραβολοειδές* και έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{k^2p} = 2z.$$

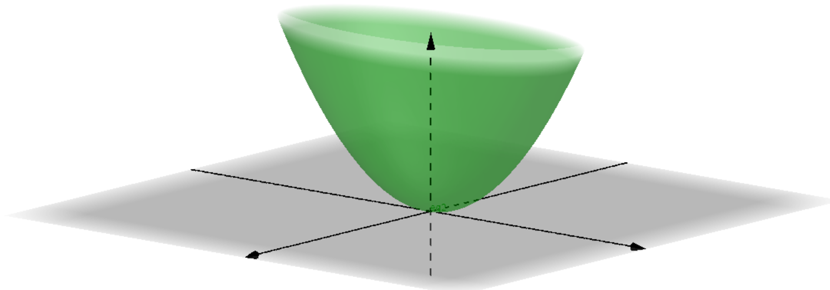
Θέτουμε $k^2p = q$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Ορισμός 9.6.2. Η επιφάνεια σε ένα ορθοκανονικό συστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p \geq q > 0$$

καλείται *ελλειπτικό παραβολοειδές*.



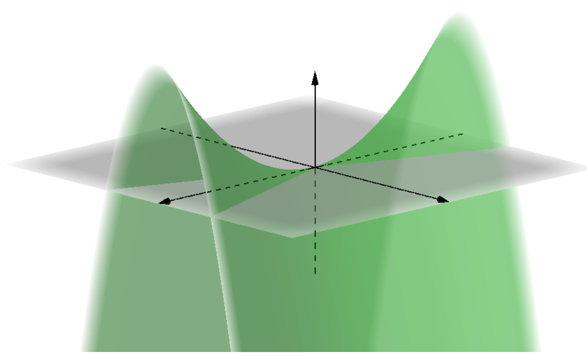
Σχήμα 9.9: Ελλειπτικό παραβολοειδές

Ορισμός 9.6.3. Η επιφάνεια σε ένα ορθοκανονικό συστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$$

καλείται υπερβολικό παραβολοειδές.

Σημείωση 9.6.4. Θεωρούμε δύο παραβολές γ_1 και γ_2 με κοινή κορυφή O και κοινό άξονα συμμετρίας Oz, οι οποίες βρίσκονται σε κάθετα επίπεδα και έχουν διαφορετική "κατεύθυνση":
η γ_1 βρίσκεται στο Oxz-επίπεδο και έχει σάυτο εξίσωση $x^2 = 2pz,\ p > 0$,
η γ_2 βρίσκεται στο Oyz-επίπεδο και έχει σάυτο εξίσωση $y^2 = -2qz,\ q > 0$.



Σχήμα 9.10: Υπερβολικό παραβολοειδές

Το υπερβολικό παραβολοειδές παράγεται όταν η κορυφή της παραβολής γ_2 κινείται κατά μήκος της γ_1.

9.7 Επιφάνειες δευτέρου βαθμού

Έστω $Oxyz$ ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου. Ένα σύνολο E σημείων του χώρου καλείται επιφάνεια δευτέρου βαθμού αν συμπίπτει με το σύνολο όλων των σημείων του χώρου οι συντεταγμένες (x, y, z) των οποίων είναι λύσεις μιας εξίσωσης της μορφής

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

Θεώρημα. Για κάθε επιφάνεια δευτέρου βαθμού υπάρχει ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ στο οποίο η επιφάνεια έχει μία από τις μορφές:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ελλειψοειδές $(a \geq b \geq c > 0)$
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ φανταστικό ελλειψοειδές $(a \geq b \geq c > 0)$
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ μονόχωνο υπερβολοειδές $(a \geq b > 0, c > 0)$
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ δίχωνο υπερβολοειδές $(a \geq b > 0, c > 0)$
5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ φανταστικός κώνος $(a \geq b \geq c > 0)$
6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ κώνος $(a \geq b > 0, c > 0)$
7. $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$ ελειπτικό παραβολοειδές $(p \geq q > 0)$
8. $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$ υπερβολικό παραβολοειδές $(p > 0, q > 0)$
9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ελειπτικός κύλινδρος $(a \geq b > 0)$
10. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ φανταστικός κύλινδρος$(a \geq b > 0)$
11. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ υπερβολικός κύλινδρος $(a > 0, b > 0)$
12. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ ζεύγος φανταστικων τεμνόμενων επιπέδων με τομή τον άξονα Oz $(a \geq b > 0)$
13. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ ζεύγος πραγματικών τεμνόμενων επιπέδων
14. $y^2 = 2px$ παραβολικός κύλινδρος $(p > 0)$
15. $x^2 - a^2 = 0,\ a \neq 0,$ ζεύγος παράλληλων πραγματικών επιπέδων $x = a,\ x = -a$
16. $x^2 + a^2 = 0,\ a \neq 0,$ ζεύγος παράλληλων φανταστικών επιπέδων
17. $x^2 = 0$ ζεύγος συμπιπτόντων επιπέδων $x = 0$.

9.8 Ασκήσεις.

9.8.1. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$.
Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned}(x^2-6x+9)+4(y^2+2y+1)+9(z^2-4z+4)-9-4-36 &= 0\\ (x-3)^2+4(y+1)^2+9(z-2)^2-49 &= 0 \qquad (9.1)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα x,y,z στην (9.1) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$\begin{aligned}x&=x'+3\\ y&=y'-1\\ z&=z'+2\end{aligned}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στη μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O'=(3,-1,2)$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$x'^2+4y'^2+9z'^2=49 \Longleftrightarrow \frac{x'^2}{49}+\frac{y'^2}{\frac{49}{4}}+\frac{z'^2}{\frac{49}{9}}=1$$

που είναι εξίσωση του ελλεψοειδούς. Άρα, η επιφάνεια είναι ελλειψοειδές.
9.8.2. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $4x^2-y^2-z^2+32x-12z+44=0$.
Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned}4(x^2+8x+16)-y^2-(z^2+12z+36)+44-64+36 &= 0\\ 4(x+4)^2-y^2-(z+6)^2 &= -16 \qquad (9.2)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα x,y,z στην (9.2) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$\begin{aligned}x&=x'-4\\ y&=y'\\ z&=z'-6\end{aligned}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στη μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O'=(-4,0,-6)$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$4x'^2-y'^2-z'^2=-16 \Longleftrightarrow -\frac{x'^2}{\frac{16}{4}}+\frac{y'^2}{16}+\frac{z'^2}{16}=1$$

που είναι εξίσωση του μονόχωνου υπερβολοειδούς.
9.8.3. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $6y^2+6z^2+5x+6y+30z-11=0$.
Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned}6\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)+6\left(z^2+5z+\frac{25}{4}\right)+5x-11-\frac{6}{4}-\frac{150}{4} &=0\\ 6\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(z+\frac{5}{2}\right)^2+5x-25 &=0\\ 6\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(z+\frac{5}{2}\right)^2+5(x-5) &=0 \qquad (9.3)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα x,y,z στην (9.3) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$\begin{aligned}x&=x'+5\\ y&=y'-\frac{1}{2}\\ z&=z'-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στη μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O' = (5, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$6y'^2 + 6z'^2 + 5x' = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'^2}{\frac{5}{12}} + \frac{z'^2}{\frac{5}{12}} = -2x'$$

που είναι εξίσωση του ελλειπτικού παραβολοειδούς.

9.8.4. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $6y^2 + 6z^2 + 6y + 30z - 11 = 0$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$6\left(y^2 + y\right) + 6\left(z^2 + 5z\right) - 11 = 0$$
$$6\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{6}{4} - \frac{150}{4} - 11 = 0 \tag{9.4}$$

Αντικαθιστώντας τα x, y, z στην (9.4) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$x = x'$$
$$y = y' - \frac{1}{2}$$
$$z = z' - \frac{5}{2}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στη μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O' = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$6y'^2 + 6z'^2 - 50 = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'^2}{\frac{50}{6}} + \frac{z'^2}{\frac{50}{6}} = 1$$

που είναι εξίσωση του ελλειπτικού κυλίνδρου.

9.8.5. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $3x^2 - 18x + 10y = 0$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$3\left(x^2 - 6x\right) + 10y = 0$$
$$3\left(x - 3\right)^2 + 10y - 27 = 0$$
$$3\left(x - 3\right)^2 + 10\left(y - \frac{27}{10}\right) = 0 \tag{9.5}$$

Αντικαθιστώντας τα x, y, z στην (9.5) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$x = x' + 3$$
$$y = y' + \frac{27}{10}$$
$$z = z'$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στη μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O' = \left(3, \frac{27}{10}, 0\right)$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$3x'^2 + 10y' = 0 \Longleftrightarrow x'^2 = -\frac{10}{3}\, y'$$

που είναι εξίσωση του παραβολικού κυλίνδρου.

9.8.6. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $3x^2 - 18x + 14 = 0$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$3\left(x^2 - 6x\right) + 14 = 0$$
$$3\left(x - 3\right)^2 - 27 + 14 = 0 \tag{9.6}$$

Αντικαθιστώντας τα x, y, z στην (9.6) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$\begin{aligned} x &= x' + 3 \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O' = (3, 0, 0)$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$3x'^2 - 13 = 0 \Longleftrightarrow x'^2 = \frac{13}{3}$$

που είναι εξίσωση του ζεύγους παράλληλων επιπέδων $x' = \sqrt{\frac{13}{3}}$ και $x' = -\sqrt{\frac{13}{3}}$.

9.8.7. Δίνεται η επιφάνεια $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z - 10 = 0$ και η ευθεία

$$\varepsilon : \begin{cases} x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ x - 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

(α′)Να αποδειχθεί ότι η επιφάνεια είναι σφαίρα και να βρεθεί το κέντρο K και η ακτίνα R αυτής.

(β′) Να βρεθεί το σημείο συμμετρικό του κέντρου K της σφαίρας ως προς την ευθεία ε.

9.8.8. Δίνεται η επιφάνεια $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 5 = 0$.

(α′)Να αποδειχθεί ότι η επιφάνεια είναι σφαίρα και να βρεθεί το κέντρο K και η ακτίνα R αυτής.

(β′) Να βρεθεί η ακτίνα σφαίρας που έχει το ίδιο κέντρο με την K και η οποία εφάπτεται με το επίπεδο $\Pi_0 : 2x + 3y + 6z - 7 = 0$.

Ευρετήριο